

Име: Ф№: Група:

25 т. **Задача 1.** Обяснете какво е *долна граница върху сложност на задача*. Обяснете какво е *сортиране чрез директни сравнения*. Обяснете какво е *дърво за вземане на решение* и как е свързано това понятие със сортирането чрез директни сравнения. Докажете, използвайки дърво за вземане на решение, че сортирането чрез директни сравнения има долна граница $\Omega(n \lg n)$.

75 т. **Задача 2.** Даден е неориентиран свързан тегловен граф G с тегловна функция $w : E(G) \rightarrow \mathbb{N}^+$. Разглеждаме само прости пътища. За всеки път p в G , дължината на p е $\sum_{e \in E(p)} w(e)$. За всеки два върха u, v , разстоянието между u и v , което бележим с $\text{dist}(u, v)$, е дължината на най-къс път между u и v . За всеки връх u , *ексцентрицитетът* на u е

$$\epsilon(u) = \max \{ \text{dist}(u, v) \mid v \in V(G) \}$$

Диаметърът на G е

$$\text{diam}(G) = \max \{ \epsilon(u) \mid u \in V \}$$

Предложете алгоритъм със сложност $O(m(\lg n)^5)$, който връща число x , такова че

$$\frac{1}{2} \cdot \text{diam}(G) \leq x \leq \text{diam}(G)$$

Може да ползвате наготово алгоритми и резултати от лекции. Допустимо е да опишете алгоритъма на високо ниво, на български език, а не на псевдокод. Обосновете накратко коректността и сложността по време на Вашия алгоритъм.

Упътване: Тук се иска *апроксимиращ*, а не *точен*, алгоритъм за претегления диаметър на графа. С други думи, не се иска алгоритъмът да изчисли точно диаметъра, а е достатъчно да върне число, което е близко до диаметъра; а именно, да не е повече от два пъти по-малко. Примерно, ако диаметърът е 200, Вашият алгоритъм трябва да върне число между 100 и 200 включително. Точният диаметър (а не апроксимираният) лесно може да се намери във време $\Theta(n^3)$ с Floyd-Warshall, но тук се иска по-бърз алгоритъм.

Припомнете си *неравенството на триъгълника за разстоянията* в обикновените графи. Намерете и обосновете негово обобщение в тегловни неориентирани свързани графи.

Нека изпълним алгоритъма на Dijkstra само веднъж от произволен стартов връх s . Нека t е максимално отдалечен връх от s . Забележете, че двойката върхове s, t не реализира непременно диаметър помежду си. Нека u, w е двойка върхове, която реализира диаметър помежду си. Сравнете разстоянието между s и t с разстоянието между u и w .