Изпит по избираемата учебна дисциплина
“Избрани глави от комбинаториката и теорията на графите”
(СУ, ФМИ, 17 август 2020 год.)

Задача 1. Пребройте диаграмите на Юнг, имащи не повече от m реда, всеки от които съдържа не повече от n клетки.

Задача 2. Около кръгла маса са се наредили $2n$ приятели, които искат да се разпределят в n двойки. Всяка двойка приятели трябва да се ръкуват, но ръкуванията не бива да се пресичат. Колко са всички разпределения?

Задача 3. Да се намери остатъкът, който биномният коефициент $\binom{2p}{p}$ дава при деление на p, където p е просто число, $p > 2$.

Задача 4. Докажете, че са равен брой разбиванията на естествено число от следните два вида:
— разбивания, несъдържащи десет последователни числа, различаващи се само по последните си цифри;
— разбивания, несъдържащи числа, които завършват на 45.
Числата са записани в десетичната бройна система.

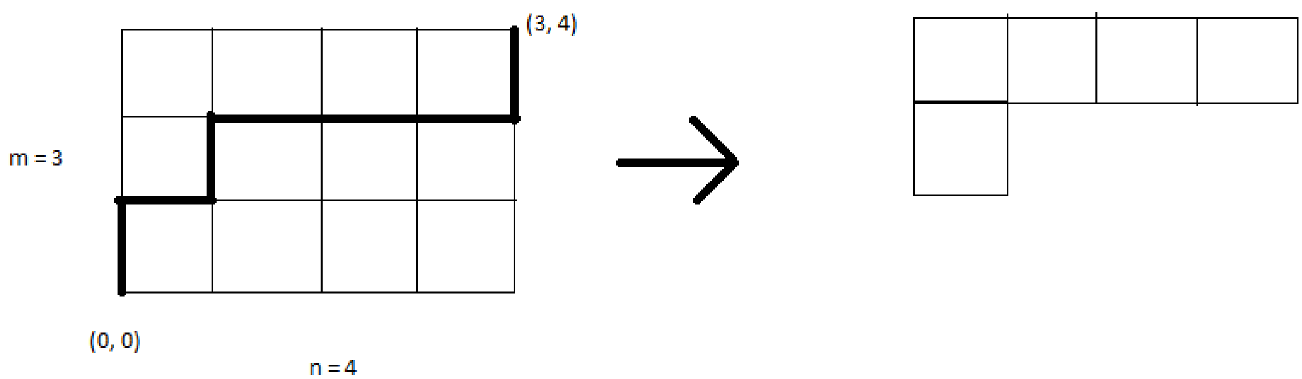
Задача 5. Намерете затворена формула (т.е. възможно най-прост израз) за обикновената пораждаща функция на броя на целите положителни числа, чийто запис в десетичната бройна система съдържа точно n цифри.

Задача 6. Пребройте съвършените съчетания в пълен триделен граф с $2n$ върха във всеки дял.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Това са диаграмите на Юнг, които могат да се впишат в правоъгълник $m \times n$. Има биекция между тях и пътищата от $(0\,;0)$ до $(m\,;n)$ с единични стъпки нагоре и надясно: всеки такъв път разделя правоъгълника на две области — горна и долна; горната област е диаграма на Юнг от разглеждания вид. Обратно, всяка диаграма на Юнг от този тип поражда път с описаните характеристики — това е контурът на диаграмата без горния и левия ръб.

Пример: Нека $m = 3$, $n = 4$.



Такъв път се състои от общо $n + m$ стъпки, като в произволни m от тях се движим нагоре, а в останалите — надясно. Тоест позициите, от които се придвижваме нагоре, определят еднозначно позициите, от които се придвижваме надясно. Следователно броят на пътищата е равен на броя на начините, по които можем да изберем m позиции от общо $m + n$, тоест това са комбинации без повторение. Броят им е равен на $\binom{m+n}{m}$, като от тях трябва да махнем една: ако направим първо m хода нагоре, после n хода надясно, получаваме празна диаграма на Юнг, която не бива да броим.

Окончателно: Има $\binom{m+n}{m} - 1$ диаграми на Юнг с не повече от m реда, всеки от които съдържа не повече от n клетки.

Задача 2. Да означим броя на разпределенията с H_n. Очевидно $H_0 = 1$: ако няма хора, съществува само едно разпределение — празното множество от приятелски двойки. При $n > 0$ да номерираме хората последователно с целите числа от 1 до $2n$ вкл. Нека № 1 се ръкува с № k. Това ръкуване разделя хората на две групи: $\{2\,;\,3\,;\,\ldots\,;\,k-1\}$ и $\{k+1\,;\,k+2\,;\,\ldots\,;\,2n\}$, в смисъл че може да има ръкувания вътре в групите, но не и между тях. Затова във всяка група трябва да има четен брой приятели, вкл. нито един. Следователно числото k трябва да бъде четно, тоест $k = 2i$ за някое i между 1 и n включително. Така задачата се разбива на две подзадачи — по една за всяка група. Тъй като в първата и втората група има съответно $k-2 = 2(i-1)$ и $2n-k = 2(n-i)$ приятели, то броят на разпределенията е равен на $H_{i-1}H_{n-i}$. Сумираме по стойностите на i и така получаваме следното рекурентно уравнение, важащо за всяко цяло $n > 0$:

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} H_{i-1}H_{n-i}\,.$$

Сменяме сумационния индекс: пишем i вместо $i-1$. След тази операция рекурентното уравнение приема вида:

$$H_n = \sum_{i=0}^{n-1} H_i H_{n-1-i}\,.$$

Оттук и от началното условие следва, че H_n е n-тото число на Каталан.

Задача 3. Тъй като $p = 10_{(p)}$ и $2p = 20_{(p)}$, то според теоремата на Люка

$$\binom{2p}{p} \equiv \binom{2}{1}\binom{0}{0} = 2\,.\,1 = 2 \pmod{p}.$$

Следователно търсеният остатък е равен на 2. (При $p = 2$ остатъкът е 0.)

Задача 4. Между забранените подмножества от двата вида има биекция, запазваща сборовете на елементите на подмножествата:
— десет последователни числа с разлики само в последните цифри:
$\{10k\,;\,10k+1\,;\,10k+2\,;\;\ldots\;;\,10k+9\}$;
— числа, завършващи на 45: $\{100k+45\}$.
Това съответствие поражда биекция между “лошите” разбивания. Затова те са равен брой, следователно и “добрите” разбивания са равен брой.

Задача 5. Има $9 \, . \, 10^{n-1}$ цели положителни числа, чийто десетичен запис съдържа точно n цифри. Обикновената пораждаща функция се пресмята по следния начин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9 \, . \, 10^{n-1} x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} 9 \, . \, 10^{n} x^{n+1} = 9x \sum_{n=0}^{\infty} (10x)^{n} = \frac{9x}{1-10x} \, .$$

Задача 6. От ребрата на съвършеното съчетание нека x свързват върхове от първия и втория дял, y ребра да свързват върхове от втория и третия дял и z ребра да свързват върхове от третия и първия дял. Понеже всеки дял има $2n$ върха, то

$$x + y = y + z = z + x = 2n.$$

Като решим тази система, намираме

$$x = y = z = n.$$

Върховете от първия дял, които ще се свържат с върхове от втория дял, можем да изберем по C_{2n}^{n} начина. Толкова начина има също да изберем върховете от втория дял, които ще се свържат с върхове от третия дял, и върховете от третия дял, които ще се свържат с върхове от първия дял. Точното съответствие между n върха от един дял и n върха от друг дял е пермутация на второто множество спрямо някаква наредба на първото; има P_n такива пермутации. Затова броят на съвършените съчетания е

$$\left(C_{2n}^{n} P_{n} \right)^{3} = \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{3} .$$