Име: .... ФN°: .... Група: ....

30 т. **Задача 1.** Говорим за неориентирани свързани тегловни графи. Дефинирайте *срез в граф.* Ако $G = (V, E)$ е неориентиран свързан тегловен граф, $\{U_1, U_2\}$ е срез в G и $e \in E$, какво означава "e прекосява среза $\{U_1, U_2\}$"?

Нека e е ребро с минимално тегло измежду всички ребра, прекосяващи среза $\{U_1, U_2\}$. Нека T_1 е минимално покриващо дърво за подграфа на G, индуциран от U_1. Нека T_2 е минимално покриващо дърво за подграфа на G, индуциран от U_2. Докажете или опровергайте, че

$$(V(T_1) \cup V(T_2), E(T_1) \cup E(T_2) \cup \{e\})$$

е минимално покриващо дърво за G.

70 т. **Задача 2.** Даден е неориентиран свързан тегловен граф G с тегловна функция $w : E(G) \to \mathbb{N}^+$. Разглеждаме само прости пътища. За всеки път p в G, дължината на p е $\sum_{e \in E(p)} w(e)$. За всеки два върха u, v, разтоянието между u и v, което бележим с $\mathrm{dist}(u, v)$, е дължината на най-къс път между u и v. За всеки връх u, *ексцентрицитетът на* u е

$$\epsilon(u) = \max\{\mathrm{dist}(u, v) \mid v \in V(G)\}$$

Диаметърът на G е

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{\epsilon(u) \mid u \in V\}$$

Професор Дълбоков твърди, че с две пускания на алгоритъма на Dijkstra може да намери диаметъра на графа, а именно:

1. Избира произволен връх s и изпълнява $\textsc{Dijkstra}(G, s)$ и после намира връх t, максимално отдалечен от s.

2. Изпълнява $\textsc{Dijkstra}(G, t)$ и после намира връх u, максимално отдалечен от t.

3. Връща $\mathrm{dist}(t, u)$.

Докажете, че професорът е прав, в случай, че е прав, или го опровергайте, ако греши.