Примерни решения на задачите от изпита по ДАА на спец. Инф. и КН, ФМИ-СУ, 22 август 2020 г.

Задача. Дадено е множество $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, като $p_1, \dots, p_n$ са точки в $\mathbb{R}^3$. Дадено е и число $k \in \mathbb{N}^+$. За всеки две точки p_i и p_j можем да изчислим разстоянието между тях във време $O(1)$. Предложете алгоритъм със сложност $O(n^2 \lg n)$, който връща разбиване на P на k подмножества, такова че минималното разстояние между точки от различни дялове на разбиването е максимално. Обосновете коректността му и сложността му по време.

По-формално казано, иска се разбиване $\{S_1, \dots, S_k\}$ на P, такова че

$$\min_{1 \le i < j \le k} \{\mathrm{dist}(p_a, p_b) \,|\, p_a \in S_i, p_b \in S_j\}$$

е колкото може по-голямо.

Решение: Очевидно задачата има смисъл само ако $k \le n$.

Конструираме неориентиран тегловен граф G, чиито върхове са точките, ребрата са ненаредените двойки от точки, а теглото на всяко ребро е разстоянието между съответните точки. Графът е пълен, следователно е и свързан и има смисъл да разглеждаме задачата за намирането на негово МПД. G може да се построи във време $\Theta(n^2)$, тъй като ребрата са $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$ на брой, а по условие теглото на всяко ребро, което е равно на разстоянието между съответните точки, се пресмята в константно време.

И така, мислим за МПД на G. Пускаме алгоритъма на Крускал върху G, но с една модификация: прекъсваме го в момента, в който е конструирал точно k на брой дървета (чрез сливания). Нека тези дървета са $T_1, \dots, T_k$. Нека гората, състояща се от тези дървета, е D.

На лекции сме казали, че ефикасните имплементации на алгоритъма на Крускал не строят експлицитно междинните дървета (които биват сливани), а просто поддържат множествата от техните върхове като разбиване на върховете на графа. Следователно, когато прекъснем алгоритъма на Крускал, разполагаме директно с разбиване, което има точно k дяла, а именно $\{V(T_1), \dots, V(T_k)\}$.

Нека разбиването $\{V(T_1), \dots, V(T_k)\}$ се казва Π. Ще докажем, че Π е такова, че в него се максимизира минималното разстояние между върхове от различни дялове. Нека d е минималното разстояние между върхове от различни дялове на Π.

Последното влече, че всеки дял-дърво има ребра, всяко от които има тегло най-много d. Причината да е така е начинът, по който работи алгоритъмът на Крускал – той първо сортира ребрата по тегло и след това построява въпросните k на брой дялове-дървета с ребра, теглото на никое от които не надхвърля минималното тегло на ребро, чиито краища са в различни дялове-дървета.

Да допуснем, че има друго разбиване Π' на $V(G)$ на k дяла, в което минималното разстояние между върхове от различни дялове е d', като $d' > d$. Очевидно съществуват върхове u и w, които в Π се намират в един и същи дял-дърво, но в Π' са в различни дялове; в противен случай няма как Π и Π' да са различни, при положение, че имат един и същи брой дялове. Щом u и w са в един и същи дял-дърво на Π, да го наречем T_i, между тях има път p (в T_i) с ребра, всяко от което има тегло $\le d$; това е така, понеже всяко ребро на T_i има тегло $\le d$. Тогава в p съществуват съседни върхове u' и w', които са в различни дървета-дялове на Π'. Изведохме, че реброто (u', w') с тегло $\le d$ има краища в различни дялове на Π'. Но по допускане, минималното разстояние между върхове от различни дялове на Π' е $d' > d$. Противоречие.

Показахме коректността на алгоритъма. Сложността му по време е сложността на конструирането на графа, а именно $\Theta(n^2)$, плюс сложност, не по-висока от тази на алгоритъма на Крускал, чиято сложност е $\Theta(n^2 \lg n)$. Ерго, сложността е $O(n^2 \lg n)$.

Задача. Говорим за неориентирани свързани тегловни графи. Дефинирайте *срез в граф*. Ако $G = (V, E)$ е неориентиран свързан тегловен граф, $\{U_1, U_2\}$ е срез в G и $e \in E$, какво означава "e прекосява среза $\{U_1, U_2\}$"?

Нека e е ребро с минимално тегло измежду всички ребра, прекосяващи среза $\{U_1, U_2\}$. Нека T_1 е минимално покриващо дърво за подграфа на G, индуциран от U_1. Нека T_2 е минимално покриващо дърво за подграфа на G, индуциран от U_2. Докажете или опровергайте, че

$$(V(T_1) \cup V(T_2), E(T_1) \cup E(T_2) \cup \{e\})$$

е минимално покриващо дърво за G.

Решение: Пита се дали винаги е вярно, че двете МПД-та плюс най-леко ребро, прекосяващо среза, е МПД за графа. Това не е вярно. Със сигурност този граф е ПД на графа, защото е свързан и няма цикли, но теглото му може да е голямо. Като контрапример разгледайте

$$G = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, d), (d, c), (c, a), (a, d)\})$$

и тегловна функция w, като

$$w(a, b) = w(d, c) = 1000, \quad w(c, a) = w(b, d) = 2, \quad w(a, d) = 1$$

като $U_1 = \{a, b\}$ и $U_2 = \{d, c\}$.

Очевидно

$$T_1 = (\{a, b\}, \{(a, b)\}), \quad T_2 = (\{d, c\}, \{(d, c)\})$$

и $w(T_1) = w(T_2) = 1000$, така че тези МПД-та плюс лекото ребро (a, d) имат сумарно тегло 2001. А G има МПД с тегло само 5, състоящо се от трите ребра, прекосяващи среза.

Задача. Даден е неориентиран свързан тегловен граф G с тегловна функция $w : \mathsf{E}(\mathsf{G}) \to \mathbb{N}^+$. Разглеждаме само прости пътища. За всеки път p в G, дължината на p е $\sum_{e \in \mathsf{E}(p)} w(e)$. За всеки два върха u, v, разтоянието между u и v, което бележим с $\operatorname{dist}(u, v)$, е дължината на най-къс път между u и v. За всеки връх u, *ексцентрицитетът на* u е

$$\epsilon(u) = \max\{\operatorname{dist}(u, v) \mid v \in \mathsf{V}(\mathsf{G})\}$$

Диаметърът на G е

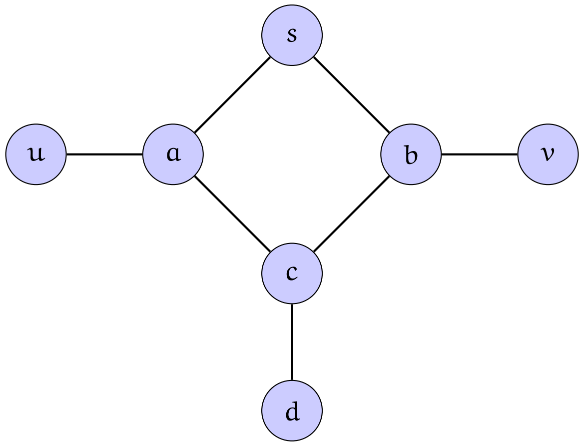
$$\operatorname{diam}(\mathsf{G}) = \max\{\epsilon(u) \mid u \in \mathsf{V}\}$$

Професор Дълбоков твърди, че с две пускания на алгоритъма на Dijkstra може да намери диаметъра на графа, а именно:

1. Избира произволен връх s и изпълнява $\textsc{Dijkstra}(\mathsf{G}, s)$ и после намира връх t, максимално отдалечен от s.
2. Изпълнява $\textsc{Dijkstra}(\mathsf{G}, t)$ и после намира връх u, максимално отдалечен от t.
3. Връща $\operatorname{dist}(t, u)$.

Докажете, че професорът е прав, в случай, че е прав, или го опровергайте, ако греши.

Решение: Професорът греши. Ето контрапример (теглата са единици):



Изпълнението на $\textsc{Dijkstra}(\mathsf{G}, s)$ намира максимално отдалечен връх d на разстояние 3. Изпълнението на $\textsc{Dijkstra}(\mathsf{G}, d)$ намира максимално отдалечен връх s на разстояние 3. В действителност диаметърът е 4 и се реализира между u и v.