Глава 1

Увод

1.1 Какво представляват числените методи?

Най-общо казано, числените методи са техники, чрез които математически задачи се представят във вид, в който могат да бъдат решени с помощта на аритметични операции. Въпреки че има много видове числени методи, те имат обща характеристика – изискват голям брой аритметични пресмятания. Ето защо тяхното прилагане става посредством имплементирането им в компютърни програми.

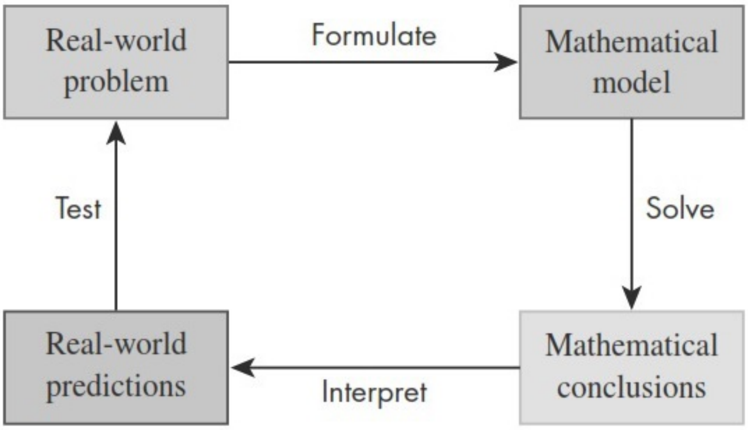
Обикновено числените методи включват **апроксимация** (т.е. приближение) на оригиналната математическа задача. Ето защо голяма част от тях можем да разглеждаме като техники за **приближеното решаване** на дадена математическа задача посредством аритметични операции.

Преди да преминем към разглеждането на конкретни числени методи, нека разгледаме въпроса защо изобщо е необходимо тяхното използване. Математиката е езикът, на който се описват процесите от света около нас. За да изучим даден реален процес или да решим дадена практическа задача, ние трябва да определим кои са основните характеристики, които ги описват – това са някакви величини, които дават информация за съответния процес (например време, скорост, температура, сила, бързодействие на алгоритъм, компресия на данни и др.). Величините се измерват в дадени мерни единици, т.е. им се съпоставят някакви числени стойности. Изучавайки даден процес, ние искаме да изучим зависимостите между величините, които го описват, като за целта създаваме и изследваме математически модел на процеса.

Най-общо казано, **математически модел** е описание на някакъв реален процес или реална задача на езика на математиката. Често това става чрез функция или уравнение (или система от уравнения), много често – диференциално, свързващо величините, описващи процеса. Математическият модел обаче може да представлява и друг математически обект. Например, изследвайки една компютърна мрежа, може да се наложи решаването на задача от теория на графите.

Целта на математическото моделиране е да се опише даденият процес и по-добре да се разберат механизмите, които го обуславят, както и, евентуално, да се направят компютърни симулации и/или предвиждания за бъдещото му поведение.

Често в литературата се дава следната схема, описваща методологията на математическото моделиране:



Да коментираме накратко етапите, описани в нея.

1. Имайки някаква реална задача, първото, което трябва да направим, е да **формулираме математически модел**, който да я описва. За целта трябва да определим основните величини, които характеризират процеса (от гледна точка на математиката – променливи и параметри), и да съставим математическата задача, която ги свързва (например диференциално уравнение, оптимизационна задача и др.). Важно е да се има предвид, че **всеки математически модел е една абстракция, идеализация на реалния процес**. В него трябва да има баланс – от една страна, моделът трябва достатъчно подробно да описва процеса, така че резултатите от него да бъдат полезни, но, от друга страна, трябва да е достатъчно прост, за да позволява математическо изследване. Всеки модел се базира на някакви допускания (абстракции), които позволяват опростяването на реалната ситуация. При създаването на математически модел използваме физически закони, обуславящи процеса, и математически техники, за да получим уравнения (или други обекти), свързващи променливите. В ситуации, когато не са известни физически закони, които да ни ръководят, може да е необходимо да се съберат данни от експерименти, на базата на които да се състави математическият модел.

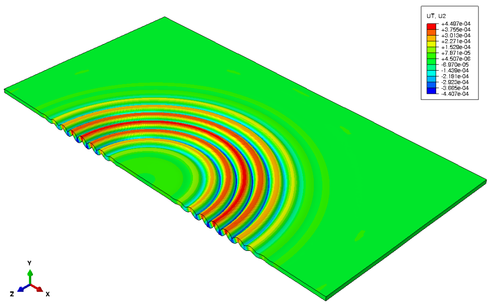
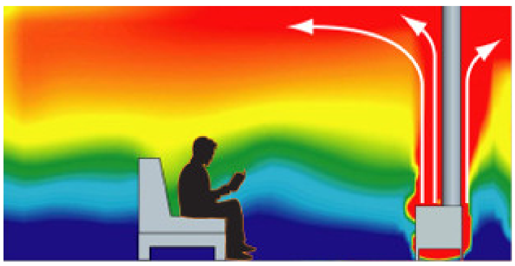
2. Имайки предвид, че математическият модел на един процес представлява математическа задача, **вторият етап е да решим тази задача** и да получим математически заключения. **В настоящия курс ние ще разгледаме именно техники, които ще можем да използваме в този етап**. Важно е да се отбележи, че практическите задачи водят твърде често до математически задачи, които не могат да бъдат решени със стандартните аналитични техники. Както знаем, дори просто изглеждащи алгебрични уравнения като полиномиалните уравнения от пета и по-висока степен в общия случай не могат да бъдат решени точно. Същото се отнася за повечето определени интеграли и др. Въпреки това обаче съществуват техники за тяхното **приближено решаване** и именно с такива ще се запознаем в курса по Числени методи за диференциални уравнения.

3. След като сме решили (в някакъв смисъл) математическата задача, **следва да интерпретираме резултатите от гледна точка на реалния процес**.

4. Да обърнем внимание, че резултатите за реалния процес, които получихме, са следствие на математическия модел, а не на самия процес. От друга страна, казахме, че математическият модел е една абстракция на реалния процес, т.е. може и да не го описва достатъчно добре. Затова е необходимо да направим **проверка дали тези резултати съответстват на реалността**. Ако това е така, можем да считаме, че моделът ни е удачен. В противен случай се връщаме в началото и трябва да модифицираме модела така, че той да отразява действителността по-добре. С други думи, математическото моделиране е един **итеративен процес**.

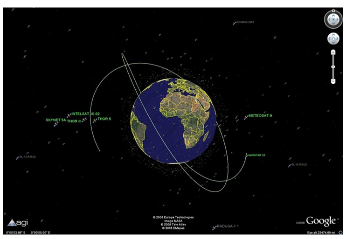
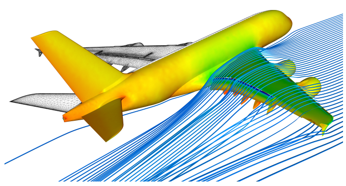
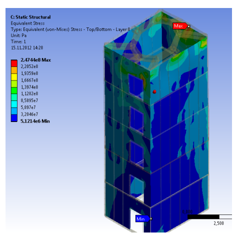
1.2 Моделиране с диференциални уравнения

След като се запознахме с методологията на математическото моделиране, нека да се фокусираме върху математическото моделиране с диференциални уравнения. Както споменахме, за да опишем даден реален процес или приложен проблем, ние се стремим да намерим зависимост между основните величини, които го характеризират. Обикновено независимите променливи, които участват в математическия модел, са трите пространствени променливи – x, y, z и времето t.

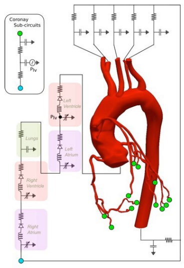
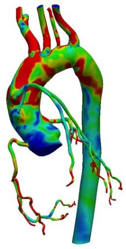



Не е трудно да видим, че нещата около нас се изменят – както с времето, така и при промяната на точката от пространството. От математическа гледна точка, това означава, че повечето математически модели неминуемо ще съдържат производни по отношение на времето и пространствените променливи или по-точно ще представляват закони, свързващи основните величини и техните производни . Това прави естествено разглеждането на диференциалните уравнения като основно средство на математическото моделиране.

От друга страна, на практика, трудно може да се намери област от науката и технологиите, в която да не се използва апаратът на математическото моделиране.

В реално време се изчисляват траекториите на сателитите. Самолетните инженери симулират обтичането на крилата на самолета от въздушния поток и напреженията, възникващи в неговата структура. Строителните инженери симулират поведението на дадена сграда при различни ситуации. От икономическа гледна точка, тези комютърни симулации позволяват пестенето на милиони, тъй като не е необходимо да се правят прототипи, чрез които да се тестват всички възможни поведения на системата.


Математически модели и компютърни симулации се правят още за предвиждания в областта на метеорологията, за описване на различни процеси в медицината (например потока на кръвта), за опазване на околната среда (например за симулация на развитието на даден петролен разлив) и т.н.

Разбира се, съществуват и други видове математически модели, освен диференциалните уравнения, например в последните години все повече се говори за "big data" и се развиват алгоритми за обработката на тези големи масиви от данни. Все пак обаче диференциалните уравнения описват огромна част от възникващите реални задачи.

1.3 Класове диференциални уравнения и задачи, които те описват

Основните два класа диференциални уравнения са обикновените и частните диференциални уравнения.

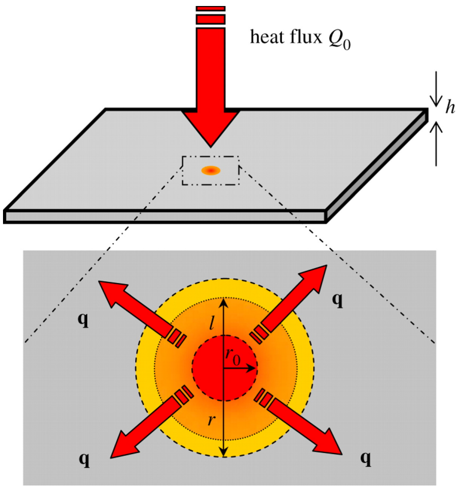
1. **Обикновени диференциални уравнения (ОДУ)**. Това са уравнения, в които участва неизвестна функция на една променлива и нейните производни. Например търсим функция $u(x)$ такава, че

$$u''(x) + u'(x) = x + 1.$$

Разглеждането на ОДУ е естествено например в следните случаи.

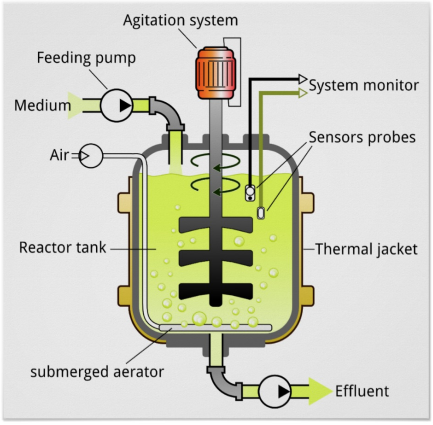
- Разглеждайки стационарното състояние на даден процес, времето не участва като независима променлива.
  - Ако моделираме обект, който може да се разглежда като едномерен (например кабелът на изображението по-долу, който е дълъг и тънък), е естествено неизвестната функция да е на една независима (пространствена) променлива (т.е. търсим $u(x) = ?$).

– Същото се отнася и в случая, когато процесът, който описваме, се характеризира с определена симетрия. Например, ако имаме радиална симетрия, както е в случая с разпространение на топлината по-долу, неизвестната функция ще бъде $u(r)$, където r е разстоянието до центъра.



- Другата принципна ситуация, при която неизвестното е функция на една променлива, е случаят, когато моделираме хомогенен процес. Ако средата е хомогенна, т.е. изследваната величина не зависи от точката в пространството, единствената независима променлива е времето, т.е. търсим $u(t) =?$.

  Като пример можем да дадем процесите в хомогенен биореактор (вж. схемата по-долу). В него има система за хомогенизиране на средата (например бъркалка), която осигурява равномерно достигане на хранителните вещества до организмите, отглеждани в реактора. Тогава концентрацията им ще зависи само от времето, но не и от точката в пространството.



Schematic Structure of a Ba... *by chartsanddiagrams* **Zazzle**

Често, предположението за хомогенност се прави като първо приближение при моделирането на даден реален процес, който всъщност не е хомогенен.

2. **Частни диференциални уравнения (ЧДУ).** В частните диференциални уравнения, както подсказва името им, неизвестните са функции на няколко променливи и участват техните частни производни. Например търсим функция $u(x, y)$ такава, че

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

На този етап ще се ограничим до това да направим класификация на ЧДУ, които ще разглеждаме в курса, по отношение на променливите, участващи в неизвестната функция. В зависимост от това дали участва времевата променлива, или не, говорим за нестационарни и стационарни задачи.

- Стационарните задачи (в които не участва времето t) биват 2-мерни (неизвестната функция е $u(x, y)$) и 3-мерни $u(x, y, z)$. Те описват равновесното състояние на даден процес.
- Нестационарните задачи описват времевата еволюция на даден процес. Те могат да бъдат 1-, 2- или 3-мерни. Съответно неизвестната функция е $u(x, t), u(x, y, t), u(x, y, z, t)$.

Съществуват още диференциални уравнения със закъснения, интегро-диференциални уравнения и др., но те остават извън рамките на настоящия курс.

1.4 Примери за ОДУ

Тук ще разгледаме само няколко примера за ОДУ, които ще използваме понататък като моделни задачи, върху които ще изложим и изследваме разглежданите числени методи. Повече примери с приложна значимост ще разгледаме в частта “Case Study”. Разнообразни примери могат да бъдат намерени и в [8].

- Важна причина за значимостта на диференциалните уравнения е фактът, че голяма част от законите на физиката, химията и т.н. представляват именно диференциални уравнения. Като пример ще дадем фундаменталния закон на Нютон, на който се основава описването на всяко движение в класическата механика:

  $$F(t) = ma(t) \Longrightarrow F(t) = m\frac{d^2u}{dt^2},$$

  където m е масата на дадено тяло, $F(t)$ и $a(t)$ са съответно (резултантната) сила, действаща върху тялото, и ускорението в момента от време t, а $u(t)$ е отместването на тялото спрямо началния момент.

  И така, Законът на Нютон представлява едно ОДУ от втори ред (т.е. в него участва втората производна на неизвестната функция u).

- Математическото моделиране навлиза все повече в областта на биологията (за повече информация вж. например класическата монография [7]). Ние ще се спрем на два класически модела (моделите на Малтус и Верхълст), описващи развитието на дадена популация, като първо ще изведем модела на Малтус. За целта ще означим с $u(t)$ числеността на популацията в момента от време t. Тогава $u(t + \Delta t)$ ще бъде числеността на популацията в момента от време $t + \Delta t$. Изменението във времевия интервал $[t, t + \Delta t]$ може да се представи в следния вид:

  $$u(t + \Delta t) - u(t) = r\Delta t\ u(t), \tag{1.1}$$

  където r е коефициентът на естествен прираст за единица време. Можем да разделим двете страни на Δt:

  $$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = ru(t) \tag{1.2}$$

  и ако пуснем Δt да клони към 0, то получаваме следното ОДУ от първи ред по отношение на u:

  $$\frac{du}{dt} = ru.$$

  Това уравнение, както и всяко друго ОДУ представлява закон, показващ скоростта на изменение на търсената функция и като такова има безброй много решения. За да можем да определим еднозначно едно решение, е необходимо да наложим и начално условие, т.е. в случая да фиксираме стойността на функцията в начален момент, в който тя е известна. Съвкупността от ОДУ и начално условие се нарича задача на Коши. В конкретния случай тя изглежда така

  $$\frac{du}{dt} = ru, t \in (t_0, \infty)$$
  $$u(t_0) = u_0,$$

  където u_0 е константа. Лесно може да се провери, че

  $$u(t) = u_0 e^{rt}$$

  е решение на модела на Малтус. То открива един съществен проблем на този модел – при $r > 0$ той предвижда неограничено нарастване на популацията, което, разбира се, не е реалистично.

- Закон на Верхълст за логистичен растеж. Той се основава на идеята, че съществува максимална численост K, която жизнената среда може да поддържа. Следователно, ако $u = K$, то популацията не би трябвало да се изменя повече, т.е. $du/dt = 0$ при $u = K$. Тя трябва да намалява при $u > K$ и да расте при $u < K$. Тези наблюдения се описват от модела

$$\frac{du}{dt} = ru(K-u), t \in (t_0, \infty)$$
$$u(t_0) = u_0.$$

Точното решение на задачата на Коши е

$$u(t) = \frac{Ku_0e^{Krt}}{K + u_0(e^{Krt} - 1)}.$$

Задача 1. Дадени са данни за развитие на биологичната популация Paramecium aurelia:

брой дни	0	2	4	6	8	10	12	14
бр. Paramecium aurelia (в капка)	4	10	46	66	70	69	71	71

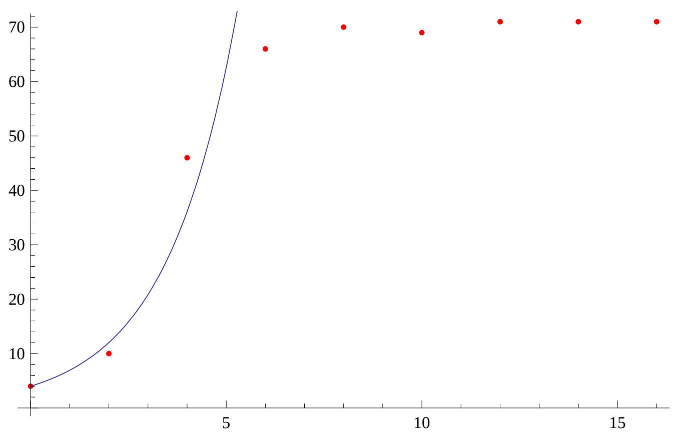
Да се приближат, като се използва:

- моделът на Малтус с коефициент на прираст $r = 0.55$;
- моделът на Верхълст с коефициент на прираст $r = 0.012$.

Решение. От данните в таблицата може да се забележи, че в началния момент е изпълнено $u(0) = 4$ или получаваме следното точно решение за модела на Малтус $u(t) = 4e^{0.55t}$, тъй като $r = 0.55$.

In[27]:=
```
plot1 = ListPlot[{{0, 4}, {2, 10}, {4, 46}, {6, 66}, {8, 70}, {10, 69}, {12, 71}, {14, 71}, {16, 71}}, PlotStyle → Red];
plot2 = Plot[4*E^(0.55*t), {t, 0, 16}];
Show[plot1, plot2]
```

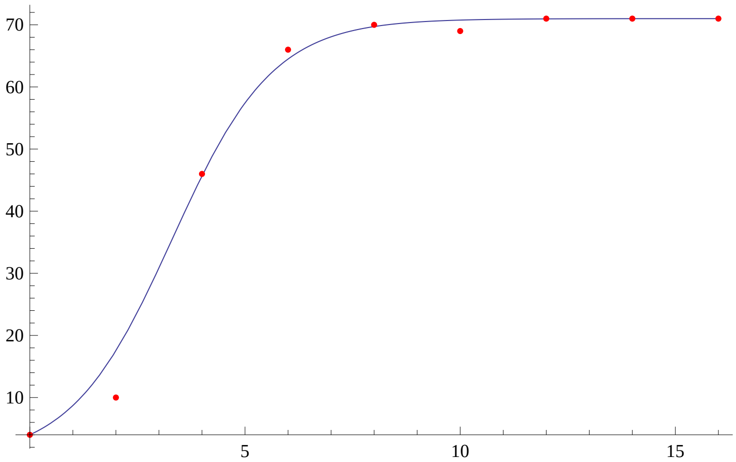
Out[29]=



При модела на Верхълст трябва да пресметнем максималната численост на популацията, която може да поддържа жизнената среда. От данните може да се види, че тя е $K = 71$, тъй като микроорганизмите достигат тази максимална численост и след това не нарастват повече.

In[82]:= plot3 = Plot[(71 * 4 * E ^ (71 * 0.012 * t)) / (71 + 4 * (E ^ (71 * 0.012 * t) - 1)), {t, 0, 16}, PlotRange → All];
Show[plot3, plot1]

Out[83]=



Глава 2

Числени методи за ОДУ от първи ред

Твърде малко ОДУ, възникващи в практиката, могат да бъдат решени аналитично. Такива са например уравненията с разделящи се променливи, линейните уравнения и др. (за повече информация – вж. [2, 8]). Ето защо най-често за тяхното решаване е необходимо използването на числени методи. Един начин за численото решаване на ОДУ е да приближим производните в диференциалното уравнение по подходящ начин.

2.1 Приближаване на производни на функция на една променлива.

Производната на функция може да бъде дефинирана като

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Тази дефиниция не е възможно да се реализира в компютърната аритметика, тъй като всички числа в компютъра се представят с определен брой значещи цифри след десетичната точка. Следователно бихме могли да приближим производната по следния начин:

$$f'(t) \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \tag{2.1}$$

като изберем Δt да бъде фиксирано малко число (например $\Delta t = 0.001$).

Ако положим формално $\Delta t = -\Delta s$ във формула (2.1), то ще получим друг начин за приближаване на производна:

$$f'(t) \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t-\Delta s) - f(t)}{-\Delta s} = \frac{f(t) - f(t-\Delta s)}{\Delta s}$$

или

$$f'(t) \approx \frac{f(t) - f(t-\Delta t)}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

Като съберем формулите (2.1) и (2.2), получаваме следното:

$$f'(t) \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t-\Delta t)}{2\Delta t}. \tag{2.3}$$