Глава 1

Съждително смятане

1.1 Азбуки и думи

Под *азбука* стандартно се разбира непразно, крайно множество от символи. Освен кирилицата, латиницита и гръцката азбука, като познат пример за азбука можем да посочим и цифрите 0, 1, …, 9, използвани за записване на естествените, целите и рационалните числа. В нашите разглеждания няма да налагаме никакви ограничения върху символите, които можем да използваме. Така, за нас, *всяко множество*, независимо дали крайно или безкрайно, може да бъде разглеждано като азбука. Нещо повече — в нашите разглеждания ще използваме предимно безкрайни азбуки. В по-голямата си част азбуките, които ще използваме, ще се състоят от краен брой символи и безкраен списък, състоящ се от една или повече букви (от латинската или гръцката азбука) индексирани по елементите на дадени множества. Например, някои от конкретните азбуки, които ще разглеждаме са

$$\neg, \vee, P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

$$\neg, \vee, =, \exists, 0, S, +, \times, <, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$$

и

$$\neg, \vee, =, \exists, 0, 1, +, \times, \xi_n \text{ за } n \in \mathbb{N}, \mathbf{i}_r \text{ за } r \in \mathbb{R}.$$

Под *дума* над азбука Σ ще разбираме всяка крайна редица от елементи (символи) на Σ. Така например всяка дума от българския език е дума над кирилицата, всяка дума от английския език е дума над латиницата, а всеки десетичен запис на естествено число е дума над азбуката 0, 1, …, 9. При дадени две думи w_1 и w_2 над една азбука, под тяхна *конкатенация* w_1w_2 ще разбираме думата, която се образува, залепяйки думата w_2 отдясно на думата w_1. По-точно, ако w_1 е думата $a_1a_2\ldots a_k$, а w_2 е думата $b_1b_2\ldots b_s$, където $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s$ са символи от азбуката, то w_1w_2 е думата $a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_s$. Ще отбележим, че операцията конкатенацията не е комутативна. Така например конкатенацията на думите 10200 и 3245 е думата 102003245, докато конкатенацията на думите 3245 и 10200 е 324510200.

Накрая ще казваме, че думата w_1 е префикс на думата w, ако съществува дума w_2, такава, че думата w съвпада с конкатенацията w_1w_2.

1.2 Език на съждителното смятане

Езикът на съждителното смятане се състои от три основни компоненти: *съждителни променливи*, *логически символи (връзки)* и *съждителни формули*. Съждитлените променливи са произволен безкраен списък от символи. В рамките на тази глава съждителните променливи са

$$P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$$

Логическите символи са $\neg$ и $\vee$, като символът $\neg$ се нарича *отрицание* и се чете „не е вярно, че“, а символът $\vee$ се нарича дизюнкция и се чете „или“ или още „вярно е поне едно от двете твърдения“. Съждителните формули са специални думи над азбуката

$$\neg, \vee, P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

Те се дефинират с помощта на следната индукция:

(i) Всяка съждителна променлива е формула;

(ii) Ако $\mathbf{A}$ е съждителна формула, то $\neg\mathbf{A}$ е съждитлена формула;

(iii) Ако $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са съждителни формули, то $\vee\mathbf{AB}$ е съждитлена формула.

Така например $\vee P_1 \neg \vee \neg P_1 \neg P_1$ и $\vee P_0 P_{15}$ са формули, а $\neg \vee \vee$ и $P_0 \neg P_1$ не са. Нека отбележим, че съгласно дефеницията, ако думата $\mathbf{C}$ е съждителна формула, то е вярно точно едно от следните твърдения

(i) $\mathbf{C}$ е съждителна променлива;

(ii) $\mathbf{C}$ започва със символа $\neg$ и съществува формула $\mathbf{A}$, такава че $\mathbf{C}$ е $\neg\mathbf{A}$.

(iii) $\mathbf{C}$ започва със символа $\vee$ и съществуват формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, такива че $\mathbf{C}$ е $\vee\mathbf{AB}$.

Въпреки, че използваният *префиксен* запис изглежда необичаен, той има известно предимство пред по-разпространения *инфиксен* запис. По-конкретно този запис допуска еднозначен прочит на формулите без необходимост от употребата на скоби, както показват следващите две твърдения.

Лема 1.1. Нека $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ са формули. В случай че $\mathbf{C}$ е префикс на $\mathbf{C}'$, то $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ съвпадат.

Доказателство. Нека първо да отбележим, че $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ съдържат поне един символ. Ще докажем твърдението с индукция по броя на символите в $\mathbf{C}'$.

(i) $\mathbf{C}'$ е съждителна променлива. Тогава $\mathbf{C}'$ съдържа точно един символ и тъй като $\mathbf{C}$ съдържа поне един символ, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ съвпадат.

(ii) $\mathbf{C}'$ е $\neg\mathbf{A}'$ за някоя формула $\mathbf{A}'$. Тогава, тъй като $\mathbf{C}$ е префикс на $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}$ е формула от вида $\neg\mathbf{A}$ за някоя формула $\mathbf{A}$, като при това задължително $\mathbf{A}$ е префикс на $\mathbf{A}'$. Но $\mathbf{A}'$ е по-къса дума от $\mathbf{C}'$ и следователно съласно индукционното предположение $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ съвпадат. Следователно $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ също съвпадат.

(iii) $\mathbf{C}'$ е $\vee\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ за някои формули $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$. Тогава, тъй като $\mathbf{C}$ е префикс на $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}$ е формула от вида $\vee\mathbf{AB}$ за някои формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Тъй като $\mathbf{C}$ е префикс на $\mathbf{C}'$, то обезателно $\mathbf{A}$ е прификс на $\mathbf{A}'$ или $\mathbf{A}'$ е префикс на $\mathbf{A}$. Но както $\mathbf{A}$, така и $\mathbf{A}'$ са по-къси думи от $\mathbf{C}'$ и значи $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ съвпадат съгласно индукционното предположение. Така $\mathbf{C}$ е $\vee\mathbf{AB}$, а $\mathbf{C}'$ е $\vee\mathbf{AB}'$. Възползвайки се отново от това, че $\mathbf{C}$ е префикс на $\mathbf{C}'$, получаваме, че $\mathbf{B}$ е префикс на $\mathbf{B}'$. Но $\mathbf{B}'$ е по-къса от $\mathbf{C}'$ и следователно $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$, а значи и $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$, съвпадат.

□

Теорема 1.2 (Теорема за еднозначния прочит)**.** Нека $\mathbf{C}$ е съждителна формула. Тогава е вярно точно едно от следните твърдения:

(i) Съществува *единствена* съждителна променлива P_n, такава че $\mathbf{C}$ е P_n;

(ii) $\mathbf{C}$ започва със символа $\neg$ и съществува *единствена* формула $\mathbf{A}$, такава че $\mathbf{C}$ е $\neg\mathbf{A}$.

(iii) $\mathbf{C}$ започва със символа $\vee$ и съществуват *единствени* формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, такива че $\mathbf{C}$ е $\vee\mathbf{AB}$.

Доказателство. Трябва да докажем единствено твърденията за единственост.

(i) $\mathbf{C}$ е съждителна променлива. В този случай твърдението е очевидно.

(ii) $\mathbf{C}$ е $\neg\mathbf{A}$. В този случай, твърдението е отново очевидно.

(iii) $\mathbf{C}$ е $\vee\mathbf{AB}$ и $\vee\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ за някои формули $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$. Тогава $\mathbf{A}$ е префикс на $\mathbf{A}'$ или $\mathbf{A}'$ е префикс на $\mathbf{A}$. И в двата случая двете формули съвпадат съгласно Лема 1.1. Така формулите $\vee\mathbf{AB}$ и $\vee\mathbf{AB}'$ и следователно формулите $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$ също съвпадат.

□

Твърдение 1.3. Нека $\mathbf{C}$ е формула. Тогава всеки символ на $\mathbf{C}$ е начало на единствена подформула на $\mathbf{C}$.

Доказателство. Единствеността следва директно от Лема 1.1. За съществуването нека първо да отбележим, че ако изберем първия символ на $\mathbf{C}$, то търсената подформула е самата $\mathbf{C}$. За общия случай ще проведем индукция по построението на $\mathbf{C}$.

(i) Ако $\mathbf{C}$ е съждителна променлива, твърдението е очевидно.

(ii) Ако $\mathbf{C}$ е $\neg\mathbf{A}$ или $\vee\mathbf{AB}$ и изберем символ, различен от първия, то този символ попада в $\mathbf{A}$ (или в $\mathbf{B}$) и съгласно индукционното предположение такава подформула съществува.

□

Теорема 1.4. Нека **A** и **B** са подформули на формулата **C** (т.е. **A** и **B** са формули и поддуми на **C**). Тогава или **A** е подформула на **B**, или **B** е подформула на **A**, или **A** и **B** нямат обща част.

Доказателство. Нека **A** и **B** имат обща част, като за определеност предположим, че суфикс на **A** е префикс на **B**. Съгласно предното твърдение първият символ на общата част е начало на подформула на **A**. Но тази подформула на **A** е префикс на **B** и следователно съгласно Лема 1.1 двете съвпадат, т.е. **B** е подформула на **A**.

□

За да можем да записваме формулите в по-обичаен вид, а така също и за да можем да използваме и другите познати логически връзки, въвеждаме следните съкращения:

- Ще пишем $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ вместо $\vee\mathbf{AB}$;
- Ще пишем $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ вместо $(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;
- Ще пишем $(\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B})$ вместо $\neg(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$;
- Ще пишем $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ вместо $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \,\&\, (\mathbf{B} \to \mathbf{A}))$.

Така формулата

$$((P_0 \,\&\, P_1) \to P_1)$$

е съкращение за формулата

$$\vee\neg\neg\vee\neg P_0\neg P_1 P_1,$$

а формулата

$$((P_2 \vee P_3) \leftrightarrow (P_3 \vee P_2))$$

е съкращение за формулата

$$\neg\vee\neg\vee\neg\vee P_2P_3 \vee P_3P_2\neg\vee\neg\vee P_3P_2 \vee P_2P_3.$$

Символът & се нарича *конюнкция* и се чете като „и“ или още „верни са и двете твърденията“. Символът $\to$ се нарича *импликация* и се чете като "ако ..., то ...“. Символът $\leftrightarrow$ се нарича *еквивалентност* и се чете като „точно тогава, когато“.

Ще направим още две уговорки, които допълнително ще опростят записа. Първо ще изпускаме записването на най-външните скоби във формулата. Така например формулата $(P_0 \to (P_0 \vee P_1))$ ще записваме чрез $P_0 \to (P_0 \vee P_1)$, а формулата $(\neg\neg P_0 \leftrightarrow P_0)$ чрез $\neg\neg P_0 \leftrightarrow P_0$. Второ, в случай в записа на някоя формула са пропуснати скоби ще считаме, че скобите са групирани вдясно, т.е. най-дясната връзка, която не е заградена в скоби е с най-висок приоритет. Така например ще пишем $P_0 \vee P_1 \vee P_0$ вместо $P_0 \vee (P_1 \vee P_0)$ и $P_0 \to P_1 \to P_2$ вместо $P_0 \to (P_1 \to P_2)$.

1.3 Аксиоми на съждителното смятане. Правила за извод.

В предния параграф дефинирахме езика на съждителното смятане. За да завършим дефиницията на формалната система на съждителното смятане остава да кажем, кои от формулите ще наричаме аксиоми на съждителното смятане и какви са правилата за извод. Аксиомите на съждителното смятане се определят чрез следната схема:

$$\text{За всяка съждителна формула } \mathbf{A}, \text{ формулата } \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \text{ е аксиома.} \qquad \text{(A)}$$

Аксиомите са твърдения, които приемаме за верни и не подлежат на доказателство. В случая ние приемаме, че всяко твърдение или е вярно, или е вярно, че не е вярно, т.е. или е вярно самото твърдения, или е вярно неговото отрицание. Тази аксиома се нарича аксиома (или още принцип) за изключеното трето и стои в основата на почти всички математически разглеждания. Изключение прави само интуиционистката логика, където отрицанието се разглежда по един малко по-особен начин.

Остава само да фиксираме правилата, с помощта на които ще получаваме теоремите, изхождайки от аксиомите. Ще се спрем на следния списък от четири правила. Всяко правило ще се състои от два списъка от формули разделени с черта. Списъкът над чертата ще съдържа една или две формули, а този под чертата една формула. Така записано, правилото ни дава право да изведем формулата, стояща под чертата, от списъка от формули, намиращ се над чертата. Правилата са подбрани така, че ако формулите над чертата са верни, то задължително тази под чертата също да бъде вярна.

(ПР)	$\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{A}}$	(Правило за разширяването)
(ПСв)	$\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{A}}{\mathbf{A}}$	(Правило за свиването)
(ПА)	$\dfrac{\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}}$	(Правило за асоциативност)
(ПО)	$\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B},\ \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{C}}$	(Правило за съкращението)

Всако едно от правилата е валидно за всеки избор на формули $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Така дефинирани, тези четири правила са правила за текстообработка, т.е. правила за получаване на нови думи от думи, които вече сме получили. Интуицията, стояща зад тези правила е следната. Да разледаме първо *правилото за разширението.* То казва, че за всеки избор на формула $\mathbf{B}$ можем да получим формулата $\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ от формулата $\mathbf{A}$. Смисълът на това правило е, че в случай, че $\mathbf{A}$ е вярно твърдение, то необходимо е вярно и твърдението $\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$, каквото и да е твърдението $\mathbf{B}$. Това действитлено е така, тъй като формулата $\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ казва, че е вярно поне едно от твърденията $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Правилото за свиването ни дава право да получим формулата $\mathbf{A}$ от формулата $\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$. С други думи, то казва, че ако е вярна формулата $\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$

то непременно е вярна и формулата $\mathbf{A}$. Това действително е така, тъй като ако знаем, че е вярна поне една от формулите $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}$, то тогава със сигурност можем да твърдим, че е вярна формулата $\mathbf{A}$.

Правилото за асоциативността ни дава право да получим формулата $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$ от формулата $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$, или казано малко по-неточно, то ни позвалява да местим скобите наляво. Това правило казва, че ако формулата $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ е вярна, то със сигурност е вярна и формулата $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$. Това наистина е така, тъй като в случай, че е вярна формулата $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$, то е вярна поне една от двете формулите $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ и значи е вярна поне една от трите формули $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. От друга страна, ако е вярна поне една от трите формули $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ то е вярна поне една от двете формули $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и значи е вярна и формулата $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$.

Накрая, *правилото за съкращението* ни дава право да получим формулата $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ от формулите $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$. Както по-горе, смисълът на това правило е, че ако формулите $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$ са верни, то със сигурност е вярна и формулата $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$. Това е действително така, тъй като, ако формулите $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$ са верни, то е вярна поне една от формулите $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, и поне една от формулите $\neg\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$. От друга страна не е възможно формулите $\mathbf{A}$ и $\neg\mathbf{A}$ да бъдат едновременно верни и значи е вярна поне една от формулите $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, т.е. формулата $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ е вярна.

Така представената интуиция за това, как правилата запазват верността на формулите ще бъде формализирана в следващия параграф. Със задаването на правилата дефинирането на формалната система на съждителното смятане е завършена и вече можем да говорим за теоремите на тази формална система. Да напомним, че ако $\mathbf{A}$ е теорема на съждителното смятане, ще пишем $\vdash_{PC} \mathbf{A}$ или за по-кратко $\vdash \mathbf{A}$ в рамките на тази глава.