ТЕМА 1: МНОЖЕСТВА

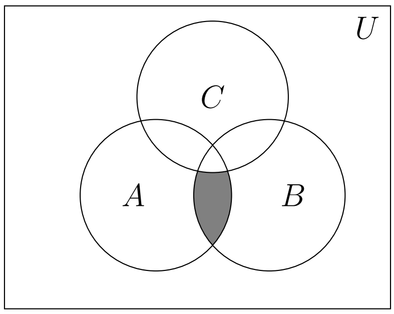
Понятие за множество

Означения за множество и елемент на множество. Принадлежност на елемент към множество

a, b, m, x, y, t
$A, A', B, M, \emptyset$
$a \in b; \neg(a \in b); a \notin b; a \in A; m \in M'; x \notin B; A \in M'; B \notin A$

Представяне на множества

- чрез изброяване на елементите на множеството:
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}; \{0, 1, ...7\}; \{a, b, x, y, z\}$
$A = \{a, b, ..., z\}; A' = \{A\}$
$M = \{\emptyset\}; P = \{a, \{1, 2, 3\}, M\}$
$J_n = \{0, 1, ..., n-1\}; I_n = \{1, 2, ...n\}$
$B = \{false, true\}$
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ - множество на естествените числа
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ - множество на целите числа
$\mathbb{Q}$ - множеството на рационалните числа
$\mathbb{R}$ - множеството на реалните числа
$\mathbb{C}$ - множеството на комплексните числа
- чрез указване на свойство, общо за елементите:
$X = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 100\}$
$\mathbb{Q} = \{< x, y > | x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\}$
- чрез диаграми на Вен



Равенство на множества. Проверка за равенство на множества

$\{a, b, a\} = \{a, b\}$
$\{x, y, x, 1, y, b\} = \{1, x, y, b\}$

Празно множество: $\emptyset$ или $\{\}$

Подмножество на дадено множество:

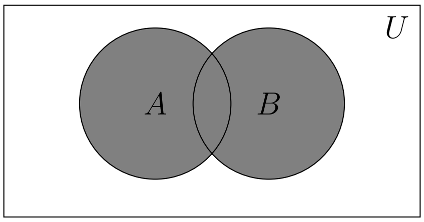
$M' = \{x | x \in M, P(x)\}$
$\forall M : M \subseteq M; \emptyset \subseteq M$

Степенно множество на дадено множество:

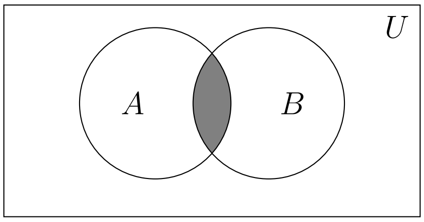
$2^M = \{M' | M' \subseteq M\}$

Операции над множества:

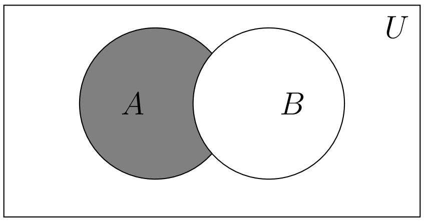
- Обединение на две множества
$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$



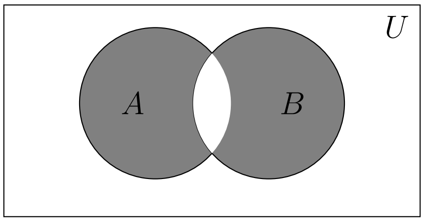
- Сечение на две множества
$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$



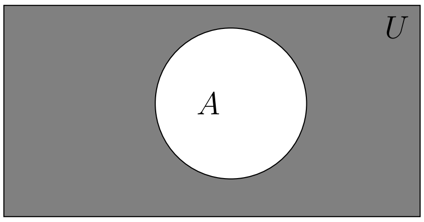
- Разлика на две множества:
$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$



- Симетрична разлика на две множества
$A \triangle B = \{x | x \in A \wedge x \notin B \ \vee x \in B \wedge x \notin A\}$



- Допълнение на множество до дадено множество U
$\overline{A}^U = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$



Свойства на операциите над множества

1. Идемпотентност
$A \cup A = A; A \cap A = A$

2. Комутативност
$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A; A \triangle B = B \triangle A$

3. Асоциативност
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. Дистрибутивност
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5. Свойства на празното и на универсалното множество
$A \cup \emptyset = A; A \cap \emptyset = \emptyset; A \setminus \emptyset = A$
$A \cup U = U; A \cap U = A; A \setminus U = \emptyset$

6. Свойства на допълнението
$A \cup \overline{A} = U; A \cap \overline{A} = \emptyset;$
$A \setminus \overline{A} = A; \overline{\overline{A}} = A$

7. Закони на ДеМорган
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

8. Други свойства
За произволни множества A и B е изпълнено:
$A \subseteq A \cup B; A \cap B \subseteq A;$
$A \setminus B \subseteq A; A \setminus B = A \cap \overline{B}$
$A \cup (A \cap B) = A; A \cap (A \cup B) = A$
$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A; (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

Табличен метод за представяне на множества

Таблично представяне на резултата на операциите допълнение на множествата A и B; обединение, сечение, разлика и симетрична разлика на множествата A и B:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$A \triangle B$
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0

Доказване на равенство на множества с помощта на табличния метод

$A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

A	B	$A \cap (\overline{A} \cup B)$	$A \cap B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Задачи за упражнение:

1. Проверете истинността на следните твърдения:

a) $\emptyset \subseteq \emptyset$
b) $\emptyset \in \emptyset$
c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
d) $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$
e) $\{1\} \in \{1,2,3\}$
f) $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,\{1,2\}\}$
g) $\{1,2\} \in \{1,2,3,\{1,2\}\}$
h) $\{\{1,2\},\{1,2,3\}\} = \{1,2,3\}$
i) $\{1,2,1,2,3\} = \{1,2,3\}$

2. Определете равни ли са съответните множества:

a) $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$
b) $\{a,b,c\}$ и $\{a,b,c,c\}$
c) $\{1,2,3\}$ и $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

3. Дадени са множествата:

$S1 = \{a,b,c\}, S2 = \{a,b\}, S3 = \{b,c\}, S4 = \{b,c,d\}$
Да се определи кои от следните отношения са верни:
a) $S2 \subseteq S1$ b) $S3 \subseteq S1$ c) $S4 \subseteq S1$

4. Дадени са множествата: $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{0,2,4,6\}$ и $C = \{1,3,5\}$. Да се определят следните множества:

a) $(A \cup B) \triangle (A \cap B)$
b) $A \triangle (A \cup B)$
c) $(A \triangle B) \setminus (A \triangle B)$
d) $(A \setminus B) \triangle (A \setminus C)$

5. Дадени са множествата:

$A = \{3n | n \in \mathbb{Z}, n \geq 4\}$
$B = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$
$C = \{n | n \in \mathbb{Z}, n^2 \leq 100\}$

Като използвате операцииите над множества, изразете следните множества чрез множествата A, B, C и $\mathbb{N}$.

a) {нечетните естествени числа}
b) $\{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10\}$
c) $\{6n | n \in \mathbb{Z}, n \geq 2\}$
d) $\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}$

6. Дадени са множествата: $A = \{1,2,4,7,8\}, B = \{1,4,5,7,9\}$, $C = \{3,7,8,9\}$ и универсалното множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Да се определят следните множества: $X = \{2,7,9\}$ и $Y = \{3,5,6,7,9,10\}$ чрез операции над множествата A, B и C.

7. Докажете следните тъждества:

a) $\overline{(A \cap \overline{B})} \cup B = \overline{A} \cup B$
b) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B \cup C}} = A \cup B \cup C$
c) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A \cup C}) = \emptyset$

d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
e) $A \triangle A \triangle A = A$

8. Проверете истинността на следните твърдения. Използвайте диаграми на Вен за да илюстрирате решението си.
a) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \triangle B$
b) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus A) = A \triangle B$
c) $(A \triangle B) \setminus B = A$
d) $(A \triangle B) \triangle B = A$
e) $A \triangle A = A \setminus A$

9. Напишете всички верни твърдения от вида: $A \in B$ и $A \subseteq B$, където A и B се избират по всички възможни начини измежду $1, \{1\}, \{\{1\}\}$

10. Определете множеството, състоящо се от всички множества X такива, че:
$\{1, 2, 3\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
11. Да се напише в явен вид степенното множество на всяко от следните множества:
a) $\{a, b, c\}$
b) $\{a, \{b, c\}\}$
c) $\{\{a\}, \{b\}\}$
d) $2^{\{3\}}$

12. Дайте пример за:
a) Непразно множество, което е подмножество на своето степенно множество;
b) Множество, което не е подмножество на своето степенно множество;
c) Множества A и B такива, че е изпълнено: $A \in B$ и $A \subseteq B$.

13. Да се докаже или опровергае всяко от следните твърдения:
a) Ако $A \cap B = \emptyset$ и $B \cap C = \emptyset$, то $A \cap C = \emptyset$
b) Ако $A \cap B = \emptyset$ и $C \cap D = \emptyset$, то $(A \cap C) \cap (B \cap D) = \emptyset$
c) Ако $A \cap B = \emptyset$ и $C \cap D = \emptyset$, то $(A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset$
d) $A \setminus \overline{B} = A \cap B$
e) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$
f) $A \setminus B = \overline{B \setminus A}$

14. Дадени са множествата: $U = \{a, 1, b, 2, c, 3, d, 4\}$, $A = \{a, c, 1, d\}$ и $B = \{2, b, c, 1\}$. Напишете в явен вид елементите, принадлежащи на всяко от множествата:
$X = 2^{\overline{A \cap B}^U \setminus \overline{A \cup B}^U}$ и $Y = 2^{\overline{A \cap B}^U} \setminus 2^{\overline{A \cup B}^U}$

15. Да се докаже или опровергае всяко от следните твърдения:
a) $\overline{(\overline{A} \cup B)} \cap \overline{C} = \overline{A} \cap \overline{(B \cup C)}$
b) $A \setminus \overline{(B \cup C)} = A \cap (B \cup C)$
c) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$
d) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
e) $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$
f) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
g) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
h) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$
i) $(A \setminus \overline{B}) \cup (A \setminus \overline{C}) = A \cap (B \cap C)$