ТЕМА 2: МНОЖЕСТВА (ПРОДЪЛЖЕНИЕ)

Принцип на математическата индукция: Нека $P(n), n \in \mathbb{N}$ е твърдение, и нека n_0 е дадено естествено число. Твърдението е вярно за всяко естествено число, по-голямо или равно на n_0, ако е в сила следното:

1. Вярно е $P(n_0)$;
2. Ако е вярно $P(k)$, то е вярно и $P(k+1)$ за всяко естествено число $k \geq n_0$.

Принцип на силната индукция:

Нека $P(n), n \in \mathbb{N}$ е твърдение, и нека n_0 е дадено естествено число. Твърдението е вярно за всяко естествено число, по-голямо или равно на n_0, ако е в сила следното:

1. Вярно е $P(n_0)$;
2. Ако е вярно $P(i), n_0 \leq i \leq k$ за някое $k \geq n_0$, то е вярно и $P(k+1)$.

Пример: Да се докаже по индукция:

$$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ за } n \geq 1$$

Доказателство:

$$P(n) : \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

1. ***База:*** Проверяваме верността на $P(1)$

$$\frac{1}{1*2} = \frac{1}{1+1}$$

Следователно $P(1)$ е вярно.

2. ***Индукционно предположение:*** $P(k)$ е вярно за някое $k \geq 1$, т.е.

$$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

3. ***Индукционна стъпка:*** Ще докажем верността на $P(k+1)$

$$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Следователно $P(k+1)$ е вярно.

4. ***Заключение:*** $P(n)$ е вярно за всяко естествено число $n \geq 1$.

Пример: Да се докаже по индукция, че всяко естествено число $n \geq 2$ е просто или е произведение на прости числа.

Доказателство:

$P(n)$: n е просто число или е произведение на прости числа.

1. ***База:*** $P(2)$ е вярно, тъй като числото 2 е просто.

2. ***Индукционно предположение:*** Нека $k \geq 2$ и $P(i)$ е вярно за всяко $2 \leq i \leq k$.

3. ***Индукционна стъпка:*** Ще докажем, че е вярно $P(k+1)$.

Ако $k+1$ е просто, то $P(k+1)$ е вярно.

Да предположим, че $k+1$ не е просто. Тогава $k+1 = xy$, където $2 \leq x \leq k$ и $2 \leq y \leq k$. Съгласно индукционното предположение, $P(x)$ и $P(y)$ са верни, т.е. x и y са прости или произведение на прости числа. Следователно и $k+1$ е произведение на прости числа.

4. ***Заключение:*** И така P(n) е вярно за всяко естествено число $n \geq 2$.

Задачи за упражнение:

1. Проверете истинността на следните твърдения:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; n \geq 1$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{(n(n+1))^2}{2^2}; n \geq 1$

c) $1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}; r \neq 1$

d) $a + ar + ar^2 + ... + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1-r}; r \neq 1$

e) $a + (a+d) + (a+2d) + ... + (a+nd) = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}$

f) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$

g) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

h) $3 + 7 + 11 + ... + (4n-1) = n(2n+1)$

i) $1 * 2 + 2 * 3 + ... + n * (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

j) $1 + 2 * 3 + 3 * 5 + ... + n(2n-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

k) $1 * 2^2 + 2 * 3^2 + ... + n(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$

2. Числата на Фибоначи се определят по следния начин:

$F_0 = 0; F_1 = 1; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$

Да се докажат по индукция следните твърдения:

a) $F_0 + F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$

b) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$

3. Числата на Лукас се определят по следния начин:
$L_0 = 2; L_1 = 1; L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$

Да се докажат по индукция следните твърдения:

a) $L_0 + L_1 + L_2 + ... + L_n = L_{n+2} - 1$

b) $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, n \geq 1$

4. Докажате по индукция следните неравенства, където $n \in \mathbb{N}$:

a) $n < 2^n$

b) $2^n < n!, n \geq 4$

c) $n! < n^n, n \geq 2$

5. Намерете стойностите на $n \in \mathbb{N}$, за които е вярно следното неравенство и докажете твърдението си по индукция:

a) $3^n < n!$,

b) $2^n > n^2$,

6. Докажете по индукция, че за всяко естествено число n е в сила следното твърдение:

a) $2^{2n} - 1$ се дели на 3

b) $2^{3n} - 1$ се дели на 7

c) $n^3 + 2n$ се дели на 3

d) $n^5 - n$ се дели на 5

e) $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ се дели на 7

7. Докажете, че всяка колетна пратка на стойност поне 12 лева, може да бъде облепена с марки със стойност 4 и 5 лева.

8. Използвайте метода на силната индукция за да докажете, че за всяко естествено число n е вярно $12|(n^4 - n^2)$.

9. Докажете по индукция следните твърдения:

a) $(1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times ... \times (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}, n \geq 2$

b) $13|3^{n+2} + 4^{2n+1}$

c) $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$

10. Дадена е функцията $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, дефинирана по следния начин:
$g(0) = 0,\ g(1) = 1,\ g(n) = 5g(n-1) - 6g(n-2), n \geq 2$
Да се докаже, че $g(n) = 3^n - 2^n, n \in \mathbb{N}$

Наредена двойка

$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Декартово произведение на множества

$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

Многократно обединение, сечение и декартово произведение.

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists j \in I, x \in A_j\}$

$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | \forall j \in I, x \in A_j\}$

$\bigtimes_{i \in I_n} A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) | a_{i1} \in A_1, a_{i2} \in A_2, ..., a_{in} \in A_n\}$

Покритие на множество А:

$\mathfrak{R} = \{S_i | S_i \subseteq A, i \in I\}$

- $S_i \neq \emptyset, \forall i \in I$
- $\bigcup_{i \in I} S_i = A$

Разбиване на множество А:

$\mathfrak{R} = \{S_i | S_i \subseteq A, i \in I\}$

- $S_i \neq \emptyset, \forall i \in I$
- $S_i \bigcap S_j = \emptyset, \forall i \forall j \in I, i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} S_i = A$

Задачи за упражнение:

1. За произволно множество A са в сила следните твърдения:
$A \times \emptyset = \emptyset$
$\emptyset \times A = \emptyset$

2. Докажете, че за произволни множества A, B и C са в сила следните твърдения:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

e) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

f) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

3. Дадени са множествата: $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 5\}$ и $C = \{3, 4, 7\}$. Да се определят следните множества:

a) $A \times B; B \times A$

b) $A \cup (B \times C); (A \cup B) \times C$

c) $(A \times C) \cap (B \times C)$

4. Дадени са множествата: $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{a, x, y, z\}$, $A_3 = \{?, !\}$. Определете следните множества:

a) $A_1 \times A_2 \times A_3$

b) $A_2 \times A_2$ или A_2^2

c) $A_3 \times A_3 \times A_3$ или A_3^3

5. Да се докаже, че $A \times B \subseteq C \times D$ точно тогава, когато $A \subseteq C$ и $B \subseteq D$.

6. Дадени са множествата: $U = \{a, 4, b, 3, c, 2, d, 1\}, X = \{c, 2, b, 1\}$ и $Y = \{d, a, 1\}$. Определете елементите, принадлежащи на всяко от множествата:

$A = 2^{\overline{X \cap Y}^U \times \overline{X \cup Y}^U}$ $B = 2^{\overline{X \cap Y}^U} \times 2^{\overline{X \cup Y}^U}$

7. Проверете истинността на следните твърдения:

a) $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$

b) $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$

c) $A \subseteq B \Rightarrow 2^A \subseteq 2^B$

8. Докажете следните твърдения:

a) $A \cap (\bigcup\limits_{i \in I} B_i) = \bigcup\limits_{i \in I} (A \cap B_i)$

b) $A \cup (\bigcap\limits_{i \in I} B_i) = \bigcap\limits_{i \in I} (A \cup B_i)$

c) $\overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i} = \bigcap\limits_{i \in I} \overline{A_i}$