1.4 Породени правила на съждителното смятане

В следващите няклоко твърдения ще изведем по-общи правила за извод на теореми във формалната система на съждителното смятане.

$$(\text{ПК}) \qquad \frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{A}} \qquad (\text{Правило за комутативност})$$

Наистина,

$$\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \quad \dfrac{}{\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}}\,(\text{Акс})}{\mathbf{B} \vee \mathbf{A}}\,(\text{ПС})$$

$$(\text{ПР}') \qquad \frac{\mathbf{A}_i}{\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n}, \quad \text{за } 1 \leq i \leq n$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}_i}{(\mathbf{A}_{i+1} \vee \cdots \vee \mathbf{A}_n) \vee \mathbf{A}_i}\,(\text{ПР})}{\mathbf{A}_i \vee \cdots \vee \mathbf{A}_n}\,(\text{ПК})}{\mathbf{A}_{i-1} \vee \cdots \vee \mathbf{A}_n}\,(\text{ПР})}{\vdots}\,(\text{ПР})}{\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{A}_n}\,(\text{ПР})$$

$$(\text{ПР}'') \qquad \frac{\mathbf{A}_i \vee \mathbf{A}_j}{\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n}, \quad \text{за } 1 \leq i, j \leq n$$

Съгласно (ПК) можем да считаме, че $i \leq j$. Ще разгледаме два случая. Нека първо $i = j$. Тогава

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}_i \vee \mathbf{A}_i}{\mathbf{A}_i}\,(\text{ПСв})}{\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{A}_n}\,(\text{ПР}')$$

Нека сега $i < j$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{A}_i \vee \mathbf{A}_j}{\mathbf{A}_n \vee (\mathbf{A}_i \vee \mathbf{A}_j)}\ (\text{ПР})}{\mathbf{A}_{n-1} \vee (\mathbf{A}_n \vee (\mathbf{A}_i \vee \mathbf{A}_j))}\ (\text{ПР})}{(\mathbf{A}_{n-1} \vee \mathbf{A}_n) \vee (\mathbf{A}_i \vee \mathbf{A}_j)}\ (\text{ПА})}{\vdots}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\mathbf{A}_{j+1} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) \vee (\mathbf{A}_i \vee \mathbf{A}_j)}{((\mathbf{A}_{j+1} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) \vee \mathbf{A}_i) \vee \mathbf{A}_j}\ (\text{ПА})}{\mathbf{A}_j \vee (\mathbf{A}_{j+1} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) \vee \mathbf{A}_i}\ (\text{ПК})}{(\mathbf{A}_j \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) \vee \mathbf{A}_i}\ (\text{ПА})}{\mathbf{A}_{j-1} \vee ((\mathbf{A}_j \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) \vee \mathbf{A}_i)}\ (\text{ПР})}{(\mathbf{A}_{j-1} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) \vee \mathbf{A}_i}\ (\text{ПА})}{\vdots}$$

$$\cfrac{\cfrac{(\mathbf{A}_{i+1} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n) \vee \mathbf{A}_i}{\mathbf{A}_i \vee \cdots \vee \mathbf{A}_n}\ (\text{ПК})}{\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \cdots \vee \mathbf{A}_n}\ (\text{ПР}')$$

$$(\text{ПП}) \qquad \frac{\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_{i_k}}{\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n}, \quad \text{за } \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$$

Доказателство. Да означим формулата $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ с $\mathbf{A}$. Ще докажем твърдението с индукция по $k \geq 1$. При $k \leq 2$ твърдението е в същност (ПР$'$) и (ПР$''$). Нека сега $k \geq 3$ и да означим формулата $\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n$ с $\mathbf{A}$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2} \vee \mathbf{A}_{i_3} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_{i_k}}{(\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2}) \vee \mathbf{A}_{i_3} \vee \ldots \vee \mathbf{A}_{i_k}}\ (\text{ПА})}{(\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2}) \vee \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n}\ (\text{Инд. предп.})}{\mathbf{A} \vee (\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2})}\ (\text{ПК})$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{A} \vee (\mathbf{A}_{i_1} \vee \mathbf{A}_{i_2})}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}_{i_1}) \vee \mathbf{A}_{i_2}}\ (\text{ПА})}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}_{i_1}) \vee \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{A}_n}\ (\text{ПР}'')}{\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \vee \mathbf{A}_{i_1})}\ (\text{ПК})}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee \mathbf{A}_{i_1}}\ (\text{ПА})}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee \mathbf{A}}\ (\text{ПР}'')}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) \vee \mathbf{A} \vee \mathbf{A}}\ (\text{ПР}'')}{\cfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{A}}{\mathbf{A}}\ (\text{ПСв})}\ (\text{ПСв})$$

□

$$(\text{ПДО}) \qquad \frac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}{\neg\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}} \quad \text{(Правило за въвеждане на двойно отрицания)}$$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{A}\lor\mathbf{B}} \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\mathbf{A}\lor\neg\mathbf{A}}\,(\text{Акс.})}{\neg\mathbf{A}\lor\neg\neg\mathbf{A}}\,(\text{ПК})}{\mathbf{B}\lor\neg\neg\mathbf{A}}\,(\text{ПС})}{\neg\neg\mathbf{A}\lor\mathbf{B}}\,(\text{ПК})$$

□

(ПДП) $$\dfrac{\neg\mathbf{A}\lor\mathbf{C} \quad \neg\mathbf{B}\lor\mathbf{C}}{\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\lor\mathbf{C}}$$ (Правило за дизюнкция в предпоставката)

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\lor\mathbf{A}\lor\mathbf{B}}\,(\text{Акс.})}{\mathbf{A}\lor\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\lor\mathbf{B}}\,(\text{ПП}) \quad \dfrac{}{\neg\mathbf{A}\lor\mathbf{C}}}{(\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\lor\mathbf{B})\lor\mathbf{C}}\,(\text{ПС})}{\mathbf{C}\lor\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\lor\mathbf{B}}\,(\text{ПК})}{\mathbf{B}\lor\mathbf{C}\lor\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ПП}) \quad \dfrac{}{\neg\mathbf{B}\lor\mathbf{C}}}{(\mathbf{C}\lor\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B}))\lor\mathbf{C}}\,(\text{ПС})}{\dfrac{\mathbf{C}\lor\mathbf{C}\lor\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}{\neg(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\lor\mathbf{C}}\,(\text{ПП})}\,(\text{ПК})$$

□

(MP) $$\dfrac{\mathbf{A} \quad \neg\mathbf{A}\lor\mathbf{B}}{\mathbf{B}}$$ (Modus Ponens)

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}\lor\mathbf{B}}\,(\text{ПП}) \quad \dfrac{}{\neg\mathbf{A}\lor\mathbf{B}}}{\mathbf{B}\lor\mathbf{B}}\,(\text{ПС})}{\mathbf{B}}\,(\text{ПСв})$$

□

1.5 Оценка на съждителните формули. Съждителни тавтологии

В този параграф ще формализираме интуицията за верността на съждителните формули, която дадохме в предния параграф. Нашата цел е на всяка съждителна формула да препишем стойност истина, означена с $\mathbb{T}$, или стойност лъжа, означена с $\mathbb{F}$. По идея съждителните формули са съставни твърдения изградени от елементарни твърдения с помощта на логическите връзки. Оценката на елементарните твърдения (съждителните променливи) не зависи от нищо и може да бъде съвсем произволна. От друга страна оценката на съставните твърдения зависи от това, как са оценени твърденията, от които е съставено. Така например верността на твърдението $P_0 \lor P_1$

зависи от верността на твърденията P_0 и P_1, като $P_0 \vee P_1$ е невярно, ако както P_0 и P_1 са неверни, и е вярно в противен случай.

Дефиниция 1.5. Под оценка V на съждителните променливи ще разбираме всяко изображение, което на всяка една от съждителните променливи съпоставя $\mathbb{T}$ или $\mathbb{F}$.

Всяка оценка на променливите V продължаваме до оценка $\tilde{V}$ на всички формули чрез следната индукция по построението на формулите:

(i) $\tilde{V}(P_i) \equiv V(P_i)$

(ii) $\tilde{V}(\neg \mathbf{A}) \equiv \begin{cases} \mathbb{T}, & \text{ако } \tilde{V}(\mathbf{A}) = \mathbb{F} \\ \mathbb{F}, & \text{ако } \tilde{V}(\mathbf{A}) = \mathbb{T} \end{cases}$

(iii) $\tilde{V}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{ако } \tilde{V}(\mathbf{A}) \equiv \tilde{V}(\mathbf{B}) \equiv \mathbb{F} \\ \mathbb{T} & \text{иначе} \end{cases}$

Следното твърдение е директно следствие на теоремата за еднозначния прочит (Теорема 1.2) и ни дава коректността на дефиницията на $\tilde{V}$

Твърдение 1.6. За всяка оценка на променливите V и всяка формула $\mathbf{A}$ съществуват единствено $X \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$, такова че $\tilde{V}(\mathbf{A}) = X$.

Да разгледаме формулата $\neg P_0 \vee P_0$. За да бъде възможно $\tilde{V}(\neg P_0 \vee P_0) \equiv \mathbb{F}$ е необходимо $\tilde{V}(\neg P_0) \equiv \tilde{V}(P_0) \equiv \mathbb{F}$. Но $\tilde{V}(\neg P_0) \not\equiv \tilde{V}(P_0)$ и следователно $\tilde{V}(\neg P_0 \vee P_0) \equiv \mathbb{T}$ за всяка оценка на променливите V. Такива формули ще наричаме съждителни тавтологии.

Дефиниция 1.7. Ще казваме, че формулата $\mathbf{A}$ е съждителна тавтология, ако за всяка оценка на променливите V е в сила $\tilde{V}(\mathbf{A}) = \mathbb{T}$.

Не всяка формула е тавтология. Така например, ако V е оценка на променливите, такава че $V(P_0) = V(P_1) = \mathbb{T}$, то $\tilde{V}(\neg P_0) \equiv \tilde{V}(\neg P_1) \equiv \mathbb{F}$, откъдето $\tilde{V}(\neg P_0 \vee \neg P_1) \equiv \mathbb{F}$ и следователно $\neg P_0 \vee \neg P_1$ не е тавтология.

Теорема 1.8 (За валидност)**.** За всяка формула $\mathbf{A}'$, ако $\vdash \mathbf{A}'$, то $\mathbf{A}'$ е тавтология.

Доказателство. Нека $\vdash \mathbf{A}'$ и нека V е оценка на променливите. Ще докажем, че $\tilde{V}(\mathbf{A}') = \mathbb{T}$ с индукция по извода на теоремите във формалната система на съждителното смятане.

(i) Нека $\mathbf{A}'$ е аксиома, т.е. $\mathbf{A}'$ е формула от вида $\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{A}$ за някоя формула $\mathbf{A}$. Тогава за да бъде в сила $\tilde{V}(\mathbf{A}') = \mathbb{F}$ е необходимо $\tilde{V}(\neg \mathbf{A}) \equiv \tilde{V}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{F}$, което е невъзможно. Следователно $\tilde{V}(\mathbf{A}') = \mathbb{T}$.

(ii) Нека $\mathbf{A}'$ се получава чрез (ПР), т.е. $\mathbf{A}'$ е формула от вида $\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ за някои формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, и $\vdash \mathbf{A}'$. Тогава, съгласно индукционното предположение, $\tilde{V}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{T}$ и следователно $\tilde{V}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{T}$, независимо от стойността на $\tilde{V}(\mathbf{B}')$.

(iii) Нека $\mathbf{A}'$ се получава чрез (ПС), т.е. $\vdash \mathbf{A}' \vee \mathbf{A}'$. Тогава, съгласно индукционното предположение, $\tilde{V}(\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}') \equiv \mathbb{T}$ и следователно $\tilde{V}(\mathbf{A}') = \mathbb{T}$.

(iv) Нека $\mathbf{A}'$ се получава чрез (ПА), т.е. $\mathbf{A}'$ е формула от вида $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$ за някои формули $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ и $\vdash \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$. Тогава, съгласно индукционното предположение, $\tilde{V}(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \equiv \mathbb{T}$, откъдето поне едно от $\tilde{V}(\mathbf{A})$, $\tilde{V}(\mathbf{B})$ и $\tilde{V}(\mathbf{C})$ приема стойност $\mathbb{T}$. Оттук $\tilde{V}((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}) \equiv \mathbb{T}$.

(v) Нека $\mathbf{A}'$ се получава чрез (ПО), т.е. $\mathbf{A}'$ е формула от вида $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ за някои формули $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и $\vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\vdash \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}$ за някоя формула $\mathbf{A}$. Тогава, съгласно индукционното предположение, $\tilde{V}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \tilde{V}(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \mathbb{T}$. Ще разгледаме два случая. Нека първо $\tilde{V}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{T}$. Тогава $\tilde{V}(\neg\mathbf{A})) \equiv \mathbb{F}$ и от $\tilde{V}(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}) \equiv \mathbb{T}$ получаваме $\tilde{V}(\mathbf{C}) \equiv \mathbb{T}$. Оттук $\tilde{V}(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) \equiv \mathbb{T}$.

Нека сега $\tilde{V}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{F}$. Тогава от $\tilde{V}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = \mathbb{T}$ следва $\tilde{V}(\mathbf{B}) = \mathbb{T}$, откъдето отново $\tilde{V}(\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) = \mathbb{T}$.

$\square$