Метод на крайните елементи – 1
Лист с формули и твърдения за финалния изпит

- Интегриране по части

$$\iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{j} v d\Omega = -\iint_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) v ds.$$

- Смяната на променливите към стандартния триъгълен елемент

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_l - x_k & x_m - x_k \\ y_l - y_k & y_m - y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

- Нека E е образът на дадена област Ω при трансформацията $x = x(\xi, \eta),\ y = y(\xi, \eta)$. Нека

$$J = det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Тогава

$$\iint_{\Omega} u d\Omega = \iint_{E} u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J| d\xi d\eta.$$

- Квадратурни формули върху стандартния триъгълен елемент:

Възли	Тегла	Алгебрична степен на точност
(1/2,1/2)	1/2	1
(0,0),(1,0),(0,1)	1/6, 1/6, 1/6	1
(1/2,0),(1/2,1/2),(0,1/2)	1/6, 1/6, 1/6	2
(0,0), (1,0), (0,1) (1/2,0),(1/2,1/2),(0,1/2) (1/3,1/3)	3/120, 3/120, 3/120 8/120,8/120,8/120 27/120	3

- (Лема на Bramble–Hilbert) Нека τ е референтна единична област в $\mathbb{R}^n$. Нека $q(u)$ е функционал в $H^{k+1}(\tau)$, за който:

  (i) $q(u+v) \leq q(u) + q(v)$ (sublinearity);

  (ii) $|q(u)| \leq C\|u\|_{H^{k+1}(\tau)}$ (ограниченост);

  (iii) $q(u) = 0$, ако $u \in P_k$.

  Тогава съществува константа C_B такава, че

$$|q(u)| \leq C_B |u|_{H^{k+1}(\tau)}.$$

- Неравенства на Poincaré–Friedrichs:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u^2 ds &\leq C\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \\
\iint_{\Omega} u^2 d\Omega &\leq C\left\{\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 ds\right\} \\
\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} &\leq C\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \\
\|u\|^2_{L_2(\Omega)} &\leq C\left(\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right), \\
\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} &\leq C\left(\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

- (Лема на Соболев) Нека $n = 1, 2, 3$ е размерността на дадена задача. Ако $u \in H^k(\Omega)$ и $k > n/2$, тогава u е непрекъсната и

$$\max_{x\in\Omega} |u(x_1, \dots, x_n)| \leq C\|u\|_{H^k(\Omega)}.$$