Метод на крайните елементи–1
Допълнителни задачи. Част 2.

2D по части полиноми. Метод на крайните елементи за стационарни 2D гранични задачи.

Задача 1. Определете базисните функции за пространството на по части линейните полиноми върху произволен триъгълник с върхове

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).$$

Задача 2. Разглеждаме задачата

$$\begin{aligned} -\Delta u + u = f, &\quad x \in \Omega, \\ u = 0, &\quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

(а) Изведете вариационната формулировка на задачата в подходящо пространство V.

(б) Формулирайте МКЕ (R.–G.), базиран на вариационната задача.

(в) Изведете априорна оценка на грешката в H^1 норма.

Задача 3. Разглеждаме задачата

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \beta u = f, &\ x \in \Omega, \\ u = 0, &\ x \in \Gamma_1, \\ -\alpha \nabla u = 10, &\ x \in \Gamma_2, \end{aligned}$$

където $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$.

(а) Изведете вариационната формулировка на задачата в подходящо пространство V.

(б) Формулирайте МКЕ (R.–G.), базиран на вариационната задача.

Коерцитивност и непрекъснатост на билинейната форма. Свързани неравенства.

Задача 4. Изведете следните неравенства на Поанкаре

$$\int_0^1 u^2 dx \le \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2 dx, \quad \forall u \in \mathcal{A} = \{u \in H^1[0,1] : u(1) = 0\},$$

$$\int_0^1 u^2 dx \le \frac{1}{4} \int_0^1 u'^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1[0,1].$$

Задача 5. Покажете, че за всяко $u \in C^1[0,1]$ са изпълнени следните неравенства:

$$\int_0^1 u^2 dx \leq \frac{1}{6}\int_0^1 u'^2 dx + \left(\int_0^1 u dx\right)^2;$$

$$\max_{x\in[0,1]} |u(x)|^2 \leq 2u^2(1) + 2\int_0^1 u'^2 dx;$$

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq 2u^2(1) + 2\int_0^1 u'^2 dx;$$

$$\max_{x\in[0,1]} |u(x)|^2 \leq 2\int_0^1 (u^2 + u'^2) dx.$$

Задача 6. Изведете слабата форма на следната гранична задача от четвърти ред, като използвате подходящо пространство V:

$$u^{(4)} + u = f(x),\ x \in (0,1),\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0.$$

Покажете, че билинейната форма $a(\cdot,\cdot)$ е коерцитивна и непрекъсната във V.

Задача 7. Разглеждаме вариационната задача

$$\int_0^1 (u'v' + uv) dx + u(1)v(1) = \int_0^1 f v dx,\ \forall v \in V.$$

Изведете диференциалната форма на задачата, ако

- $V = \{v \in H_0^1(0,1) : v(0) = 0\}$;
- $V = H^1(0,1)$.

Покажете, че и в двата случая билинейната форма е коерцитивна и непрекъсната във V. Изведете априорни оценки на грешката в H^1 норма за решението, получено по МКЕ с по части линейни функции. Като използвате трика на Nitsche, изведете априорна оценка на грешката в L_2 норма.