2.5.2 Локална и глобална грешка на апроксимация, сходимост, А-устойчивост, монотонност

Ясно е, че за да можем да използваме на практика разглежданите числени методи, трябва да знаем нещо за грешката, която получаваме при приближеното решаване на съответното диференциално уравнение.

При численото решаване на оригиналната диференциална задача има два източника на грешка:

- грешка от апроксимация - поради факта, че вместо оригиналната диференциална задача, решаваме приближена алгебрична задача;
- грешка от закръгляване - поради представянето на числата в компютъра.

Ще разгледаме ефектите от тези две грешки поотделно. Първо, нека приемем, че няма грешки от закръгляване. Искаме да оценим грешката $u_i - y_i$.

За тази цел първо ще въведем следната дефиниция.

Дефиниция 1. *Локална грешка на апроксимация (ЛГА) за диференчния метод*

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \theta_i(t_i, y_i, y_{i+1}) \tag{2.1}$$

наричаме разликата между лявата и дясната страна, пресметнати за точното решение, т.е.

$$\psi_{h,i} := \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \theta_i(t_i, u_i, u_{i+1}).$$

С други думи, ЛГА ни дава информация за това каква грешка внасяме локално, **за една стъпка от метода**. Приемаме, че до i-тата точка сме намерили решението точно, и искаме да видим каква грешка ще получим само в i-тата стъпка.

Задача 1. Да се намери ЛГА на апроксимация на явния и неявния метод на Ойлер.

Решение. За явния метод на Ойлер имаме

$$\psi_{h,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(t_i, u_i).$$

Тъй като всичко в горния израз е пресметнато в i-тата точка, освен u_{i+1}, ще изразим u_{i+1}, като развием функцията $u(t)$ в ред на Тейлър около точката t_i.

Получаваме

$$u_{i+1} = u(t_i + h) = u_i + u_i' h + O(h^2).$$

Тогава, като използваме, че $u_i' = f(t_i, u_i)$, получаваме последователно

$$\psi_{h,i} = \frac{1}{h}(\cancel{u_i} + \cancel{u_i' h} + O(h^2) - \cancel{u_i}) - \cancel{f(t_i, u_i)} = O(h).$$

Аналогично, за неявния метод на Ойлер получаваме

$$\begin{aligned} \psi_{h,i+1} &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(t_{i+1}, u_{i+1}) \\ &\frac{1}{h}(\cancel{u_{i+1}} - (\cancel{u_{i+1}} - \cancel{u_{i+1}' h} + O(h^2))) - \cancel{f(t_{i+1}, u_{i+1})} = O(h). \end{aligned}$$

Тук използвахме развитието $u_i = u(t_{i+1} - h) = u_{i+1} - u_{i+1}' h + O(h^2)$. $\square$

Локалната грешка на апроксимация е ключова за определяне на глобалната грешка $u_i - y_i$ (която всъщност ни интересува), предвид следната теорема.

Теорема 1. *Ако методът (2.1) има ЛГА от ред p (т.е. $O(h^p)$), то той е сходящ към точното решение със същата скорост, т.е. $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}\| = O(h^p)$ при $h \to 0$.*

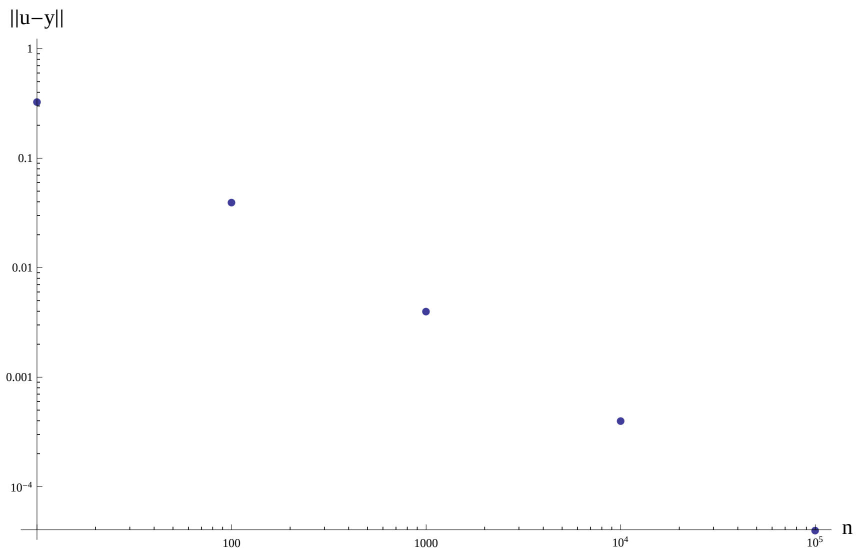
Доказателство. Вж.[3] □

И така, **явният и неявният метод на Ойлер имат първи ред на сходимост**.

Действително, нека разгледаме зависимостта на максималната грешка

$$\|u - y\| := \max_{i=\overline{0,n}} |u_i - y_i|$$

от броя интервали n, например за явния метод на Ойлер, за логистичното уравнение, върху което изложихме методите.



Виждаме, че скоростта, с която намалява грешката, е от първи ред – увеличавайки 10 пъти броя на интервалите, n, грешката намалява също от порядъка на 10 пъти.

Теоретично, сходимостта на един метод означава, че можем да получим произволна точност, стига да изберем достатъчно голямо n. Разбира се, на практика точността е ограничена от максималната точност, с която работим в компютърна аритметика.

Нека разгледаме още два примера за определяна на ЛГА.

Задача 2. Да се пресметне ЛГА за следните диференчни уравнения:

- $\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \frac{1}{3h}(y_i - y_{i-1}) + \frac{2}{3}f_i$,
- $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$.

Решение. • В първия случай ЛГА е

$$\psi_h = \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{3h}(u_i - u_{i-1}) - \frac{2}{3}f_i.$$

Развиваме около i-тата точка и получаваме последователно

$$\psi_h = \frac{1}{h}\left(\underbrace{u_i + \frac{u_i'}{1!}h + \frac{u_i''}{2!}h^2 + O(h^3)}_{u_{i+1}} - u_i\right) - \frac{1}{3h}\left(u_i - \underbrace{\left(u_i - \frac{u_i'}{1!}h + \frac{u_i''}{2!}h^2 + O(h^3)\right)}_{u_{i-1}}\right)$$
$$- \frac{2}{3}f_i = \frac{2h}{3}u_i'' + O(h^2) = O(h).$$

- Във втория пример ЛГА е

$$\begin{aligned}
\psi_h &= \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{2}(3f_i - f_{i-1}) \\
&= \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{2}(3u_i' - u_{i-1}') \\
&= \frac{1}{h}\left(\underbrace{u_i + \frac{u_i'}{1!}h + \frac{u_i''}{2!}h^2 + \frac{u_i'''}{3!}h^3 + O(h^4)}_{u_{i+1}} - u_i\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(3u_i' - \underbrace{\left(u_i' - \frac{u_i''}{1!}h + \frac{u_i'''}{2!}h^2 + O(h^3)\right)}_{u_{i-1}'}\right) \\
&= \frac{4h^2}{6}u_i''' + O(h^3) = O(h^2).
\end{aligned}$$

□

И така, ЛГА ни позволява да определим реда на сходимост за даден метод (от вида (2.1)). От друга страна, **това, че за достатъчно голямо n грешката клони към 0, далеч не означава, че за по-малки стойности на n поведението на метода ще е добро.**

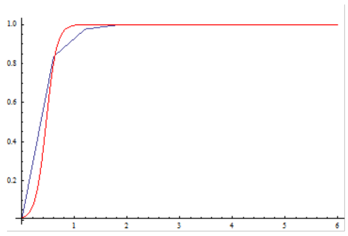
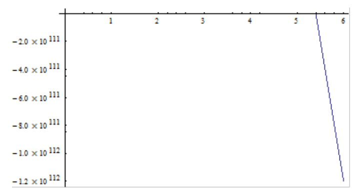
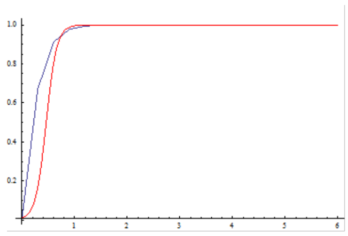
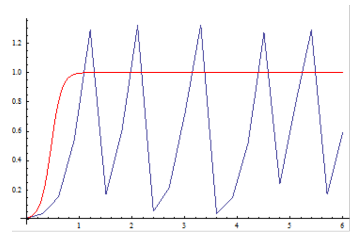
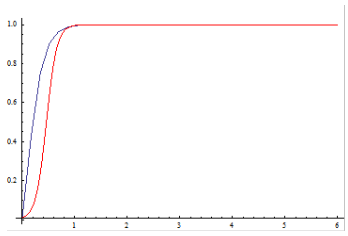
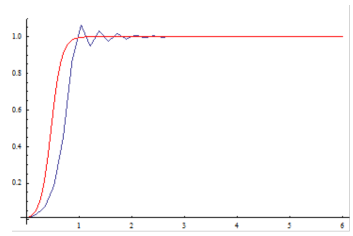
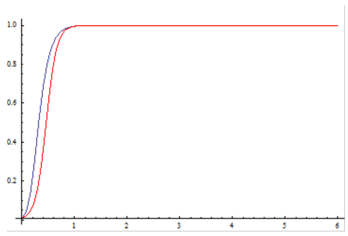
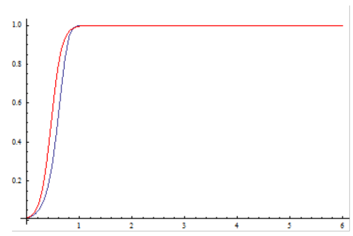
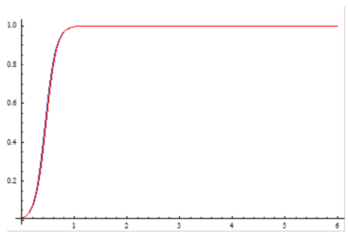
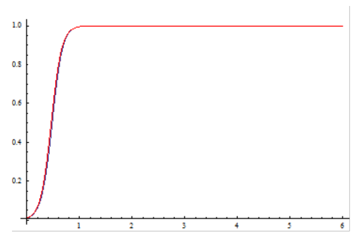
Да разгледаме следния пример.

Задача 3. Да се реши задачата на Коши

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = 10u(1-u),\ t \in (0, 6], \\
&u(0) = 0.1
\end{aligned} \tag{2.2}$$

с явния и неявния метод на Ойлер за $n = 10, 20, 35, 75, 500$.

Решение. Привеждаме резултатите от решението на задачата по-долу.

n	Неявен Ойлер	Явен Ойлер
10		
20		
35		
75		
500		

□

И така, очевидно явният метод на Ойлер няма добро поведение за малки стойности на n. Такъв проблем не се наблюдава при неявния метод на Ойлер. Това е свързано с понятията абсолютна устойчивост (A-устойчивост) и монотонност на методите.

За да въведем тези понятия, първо трябва да изясним някои свойства на решенията на едно ОДУ. Ще изложим идеите върху логистичното уравнение

$$\frac{du}{dt} = 10u(1-u).$$

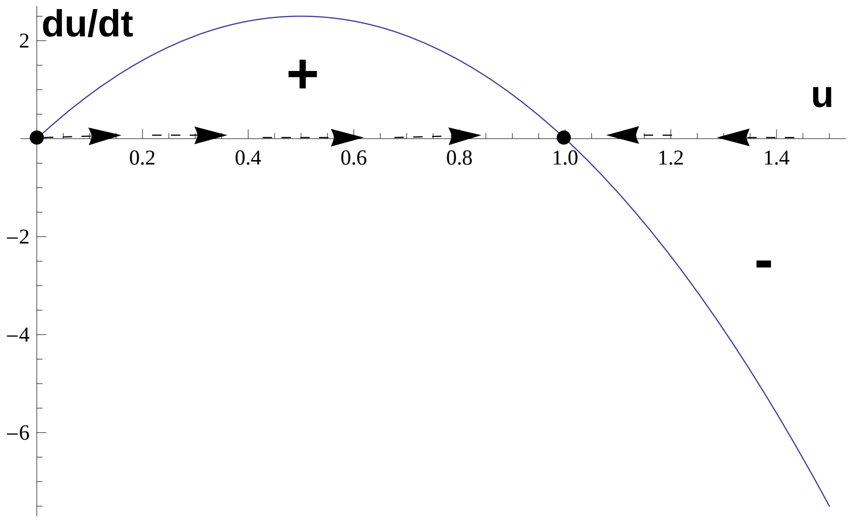
Равновесните точки на едно автономно диференциално уравнение

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

са точките $u = \xi$, за които $f(\xi) = 0$.

Равновесните точки определят еднозначно асимптотичното поведение на решенията (т.е. какво се случва с решенията в крайна сметка, след достатъчно дълъг период от време).

За логистичното уравнение очевидно равновесните точки са $u = 0$ и $u = 1$. Нека разгледаме графиката на du/dt, т.е. параболата $10u(1-u)$:



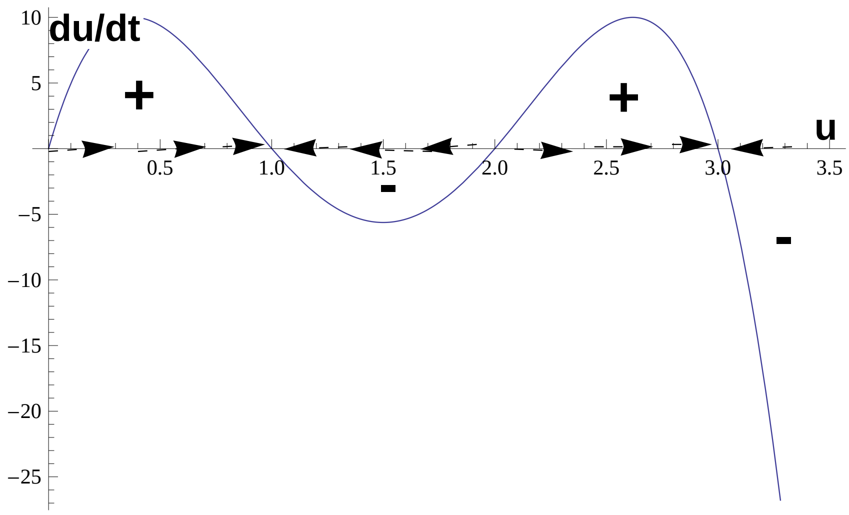
Тъй като производната на u е положителна за $u \in (0, 1)$, то ако u е в този интервал функцията е растяща. В противен случай тя е намаляваща.

От горната фигура лесно се вижда, че всички решения клонят към равновесната точка $u = 1$.

Казваме, че една равновесна точка ξ е асимптотично устойчива, ако за всички достатъчно близки до нея начални условия u_0 следва, че решението u клони към ξ. В противен случай равновесната точка се нарича неустойчива.

За логистичното уравнение точката $u = 0$ е неустойчива, защото всяко изменение на $u > 0$ води до решение, клонящо към $u = 1$. От друга страна точката $u = 1$ е асимптотично устойчива, тъй като при изменение на u решението "се връща" към единицата.

Лесно се съобразява, че за едно автономно уравнение решенията винаги клонят към асимптотично устойчива равновесна точка. Да разгледаме следната диаграма:



От фигурата е ясно, че решенията клонят или към $u = 1$, или към $u = 3$.

От гледна точка на числените методи, това поведение е от съществено значение. Възстановяването на неустойчиви решения с помощта на числени методи е лошо обусловена задача, тъй като всяка грешка от закръгляване означава, че решението, което ще се получи, ще е различно (ще клони към устойчива равновесна точка).

От друга страна, грешките от закръгляване не би трябвало да имат голямо влияние върху решенията, клонящи към устойчивите равновесни точки, тъй като $|u-\xi| \to 0$ при $t \to \infty$. С други думи, грешките от закръгляване, допуснати в даден момент от време, които са неизбежни, би трябвало с времето да стават незначителни.

Ето защо искаме числените методи да запазват асимптотичната устойчивост на решенията. Това свойство на числените методи се нарича абсолютна устойчивост или A-устойчивост.

За да видим как ще изследваме утойчивостта на численият метод, първо трябва да коментираме как аналитично изследваме устойчивостта на една равновесна точка.

Нека разгледаме уравнението

$$\frac{du}{dt} = f(u),$$

за което ξ е равновесна точка, т.е. $f(\xi) = 0$.

Развивайки дясната страна около $u = \xi$ в ред на Тейлър, получаваме

$$\frac{du}{dt} = f(\xi) + f'(\xi)(u - \xi) + O(|2|) = f'(\xi)(u - \xi).$$

Използвайки, че $f(\xi) = 0$ и че членовете от втори и по-висок ред могат да се пренебрегнат за достатъчно малки стойности на $u - \xi$, получаваме, че поведението на решението в достатъчно малка околност на точката ξ се определя от уравнението

$$\frac{du}{dt} = f'(\xi)(u - \xi).$$

Означавайки $\lambda := f'(\xi)$ и $\overline{u} := u - \xi$, записваме уравнението във вида

$$\frac{d\overline{u}}{dt} = \lambda \overline{u}, \tag{2.3}$$

където $\lambda < 0$, тъй като равновесната точка ξ е устойчива.

Дефиниция 2. *Казваме, че даден числен метод е абсолютно устойчив (А-устойчив), ако, приложен върху задачата (2.3), решението му удовлетворява*

$$|y_i| \leq |y_0|.$$

Забележка. С други думи, ако в даден момент от време е допусната грешка (например от закръгляване) y_0, искаме тя да не расте с времето и във всеки следващ момент y_i да остава не по-голяма по абсолютна стойност от y_0. Ние ще поискаме малко по-силното условие $|y_i| \to 0$.

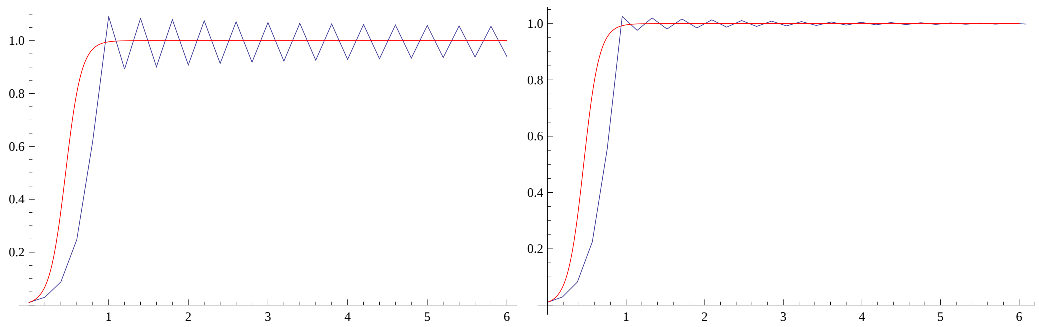
Забележка. В зависимост от решаваната задача можем да поискаме методът, който използваме, да запазва различни важни свойства на търсеното решение. А-устойчивостта е свързана със запазване на асимптотичната устойчивост.

Може да се докаже, че явният метод е А-устойчив при

$$h < -2/\lambda$$

, а неявният метод на Ойлер е А-устойчив за всяко h.

Да илюстрираме казаното върху задачата (2.2). Единствената устойчива равновесна точка е $u = 1$ и $\lambda = f'(1) = -10$. Следователно методът е А-устойчив точно тогава, когато $h \leq 2/10$, като очакваме грешката да клони към 0, ако $h < 2/10$. Действително, нека разгледаме решенията при стъпка $h = 0.2$, $h = 0.19$:



В първия случай грешката осцилира около равновесната точка без да расте, но и без да намалява. Във втория случай грешката клони към 0.

Резултатът при $h = 0.19$ обаче ни показва, че А-устойчивостта на метода не е достатъчна, за да има решението добро поведение. Въпреки че грешката клони към 0, се появява нежелано осцилиране около решението. Следователно е добре да поискаме методът да няма такова поведение.

Дефиниция 3. *Казваме, че даден числен метод е монотонен, ако, приложен върху задачата (2.3), решението му не сменя знака си, т.е.*

$$sgn(y_i) = sgn(y_0).$$

С други думи, искаме грешката да не осцилира около нулата. Явният метод на Ойлер е монотонен, когато $h < -1/\lambda$, докато неявният метод на Ойлер е монотонен за всяко h.

Библиография

[1] J. Butcher, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Wiley, 2nd edition, 2009.

[2] E. Coddington, An Introduction to Ordinary Differential Equations. Dover Publications, Unabridged edition, 1989.

[3] С. Димова, Т. Черногорова, А. Йотова, Числени методи за диференциални уравнения. Университетско издателство "Св. Климент Охридски", София, 2010.

[4] J. Hale, Ordinary Differential Equations. Dover Publications, 2009.

[5] M. Hirsh, S. Smale, R. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. Academic Press, 3rd edition, 2012.

[6] M.H. Holmes, Introduction to Numerical Methods in Differential Equations. Springer, 2007.

[7] J. Murray, Mathematical Biology I. An Introduction. Springer, 3rd edition, 2002.

[8] M. Tenenbaum, H. Pollard, Ordinary Differential Equations. Dover Publications, Revised ed., 1985.