2.2 Свързани и свободни променливи

Да разгледаме следната формула на PA (т.е. отнасяща се до естествените числа)

$$\exists y(y.SS0 = x).$$

Интуитивно тя изказва следното: „x може да се представи като произведение на $SS0$ (т.е. 2) и някое естествено число“, т.е. „x е честно число“. Още тук се вижда, че променливите x и y играят различна роля — доколкото можем да избегнем споменаването на променливата y, то за променливата x това е невъзможно. В този смисъл формулата не зависи от (стойността) на y, но зависи от стойността на x. Наистина, нека да видим, какво се случва, като заместим x с терм. Нека първо заменим x с 0. Получаваме формулата

$$\exists y(y.SS0 = 0),$$

т.е. 0 е четно число, което е вярно. От друга страна, ако заменим x с $S0$ (т.е. 1), получаваме

$$\exists y(y.SS0 = S0),$$

т.е. 1 е четно, което, разбира се, е невярно твърдение. Ако сега заменим x с $x + z$, получаваме

$$\exists y(y.SS0 = x + z),$$

което казва, че $x + z$ е четно число.

От друга страна, ако се опитаме да заменим y с терм, то единственият случай, в който бихме получили формула е когато този терм е променлива. Наистина, ако заменим y с $S0$ или с $y + z$ получаваме съответно

$$\exists S0(S0.SS0 = x) \text{ и } \exists(y + z)((y + z).SS0 = x),$$

които не се формули.

За да различаваме двата типа променливи, ще използваме термините *свързано* и *свободно участие*, като едно участие е свързано, ако е в рамките на действието на квантор и е свободно в противен случай. По-точно:

> Казваме, че едно участие (позиция, срещане) на променливата $\mathbf{x}$ във формулата $\mathbf{A}$ е *свързано*, ако то е в рамките на подформула на $\mathbf{A}$ от вида $\exists\mathbf{xB}$ (а също и $\forall\mathbf{xB}$, когато използваме съкращения). В противен случай казваме, че участието е *свободно*.

Така във формулата $x + y = 0$ и двете променливи се срещат само свободно, във формулата $\exists x(x > 0)$ променливата x се среща само свързано, а във формулата $x > 0 \vee \exists x(x.x = 0)$ първото срещане на x е свободно, а останалите 3 срещания са свързани.

Както видяхме по-горе, замествайки свободните участия на дадена променлива с терм отново получаваме формула. Не винаги обаче след заместването получанета формула изразява същото свойство като оригиналната. Наистина, да разгледаме отново формулата $\exists y(y.SS0 = x)$, изразяваща „x е четно“. Ако заместим x с терма y получаваме

$$\exists y(y.SS0 = y),$$

която не казва „y е четно“, а „съществува естествено число, което умножено по 2 дава себе си“. Аналогично, ако заместим x с терма $x + y$, получаваме

$$\exists y(y.SS0 = x + y),$$

което казва, че „към x можем да прибавим число, такова че да получим два пъти това число“, което отново е различно от това, че „$x + y$ е четно“. Проблемът и в двата случая произтича от това, че променливата y участва в заместващите термове, а свободното участие на x, което заместваме е в рамките на действието на квантор по y. Подобен тип термове ще считаме за неподходящи за замяна, а всички останали за подходящи. Точната дефиниция е следната:

Казваме, че термът $\mathbf{a}$ е *подходящ за замяна* на променливата $\mathbf{x}$ във формулата $\mathbf{A}$, ако нито едно свободно участие на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{A}$ не попада под действието на квантор по променлива, участваща в $\mathbf{a}$ (т.е. не е част от подформула от вида $\exists\mathbf{y}\mathbf{B}$ (съответно $\forall\mathbf{y}\mathbf{B}$) за някоя променлива $\mathbf{y}$, участваща в $\mathbf{a}$).

Например термът $x + y$ е подходящ за замяна на x във формулата $\exists x\forall y(x + y = 0) \vee x > 0$ (тъй като единственото свободно участие на x във формулата не попада под действието на никакъв квантор), но не е подходящ за замяна на y във формулата $y > 0 \to \exists x(x.y > 0)$ (тъй като второто свободно участие на y във формулата е в рамките на квантор по x, което е променлива от терма).

Ще отбележим два тривиални случая на терм подходящ за замяна.

- ако $\mathbf{a}$ е затворен терм (т.е. терм без променливи), то $\mathbf{a}$ е подходящ за замяна на всяка променлива във всяка формула.
- ако променливата $\mathbf{x}$ не участва свободно или не участва изобщо във формулата $\mathbf{A}$, то всеки терм е подходящ за замяна на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{A}$.

Ако $\mathbf{a}$ е терм подходящ за замяна на променливата $\mathbf{x}$ във формулата $\mathbf{A}$, то с $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ ще означаваме резултата от едновременното заместване на всички свободни участия на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{A}$ с $\mathbf{a}$.

Например, ако $\mathbf{A}$ е

$$\forall y\forall z(x = y.z \to (y = S0 \vee z = S0)),$$

а $\mathbf{a}$ е термът $x' + x''$, то $\mathbf{A}_x[\mathbf{a}]$ е формулата

$$\forall y\forall z(x' + x'' = y.z \to (y = S0 \vee z = S0)).$$

Нека още отбележим, че в тривиалния случай, в който $\mathbf{x}$ не участва свободно (или изобщо) във формулата $\mathbf{A}$, то $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$ е просто $\mathbf{A}$. Същото се отнася и в тривиалния случай, в който заместваме променливата $\mathbf{x}$ със самата себе си, т.е. $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}]$ е отново $\mathbf{A}$.

Ако $\mathbf{A}$ е формула, $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ са различни променливи, а $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ са термове (необезателно различни) подходящи за замяна съответно на $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ в $\mathbf{A}$, то с $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1\dots\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]$ ще означаваме резултата от *едновременното* заместване на свободните участия на $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ в $\mathbf{A}$ съответно с $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$.

Изискването за едновременна замяна е съществено, тъй като не е едно и също дали ще заменяме променливите едновременно или последователно. Наистина, нека $\mathbf{A}$ е формулата $x < y$. Тогава замествайки едновременно x и y съответно с $x + y$ и z (т.е. образувайки $\mathbf{A}_{xy}[x + y, z]$) получаваме $x + y < z$, докато при последователно заместване първо на x, а после на y (т.е. образувайки $\mathbf{A}_x[x + y]_y[z]$) имаме $x + z < z$.

2.3 Аксиоми и правила на предикатното смятане от първи ред

Аксиомите на една формална система $\mathcal{F}$ се разделят на два вида — *логически* и *нелогически*. Логическите аксиоми се определят чрез следните схеми:

- (Съждителни аксиоми)
$$\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A},$$
за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$;
- (Аксиоми за замяната)
$$\mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{a}] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A},$$
за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$ и всеки терм $\mathbf{a}$ на $\mathcal{F}$, подходящ за замяна на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{A}$.
- (Аксиома за тъждеството)
$$x = x;$$
- (Аксиоми за равенството)
$$x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to \mathbf{f}x_1\dots x_n = \mathbf{f}y_1\dots y_n$$
за всяко n и всеки n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{F}$.
$$x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to \mathbf{p}x_1\dots x_n \to \mathbf{p}y_1\dots y_n$$
за всяко n и всеки n-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ на $\mathcal{F}$.

Нека отбележим, че логическите аксиоми еднозначно се определят от *нелогическите* символите на формалната система. В частност, ако две формални системи имат едни и същи нелогически символи, то те имат едни и същи логически аксиоми.

Нека още да отбележим, че тъй като $=$ е двуместен (логически) предикатен символ, то формулата

$$x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2$$

е аксиома (за равенството) на всяка формална система от първи ред.

Нелогическите аксиоми на една формална система от първи ред е произволен набор (краен или безкраен) от формули на системата.

Правилата на всяка формална система от първи ред се изразяват, чрез следните схеми:

(ПР) $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{A}}$ (Правило за разширяването)

(ПСв) $\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{A}}{\mathbf{A}}$ (Правило за свиването)

(ПА) $\dfrac{\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})}{(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}}$ (Правило за асоциативност)

(ПС) $\dfrac{\mathbf{A} \vee \mathbf{B},\ \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{C}}{\mathbf{B} \vee \mathbf{C}}$ (Правило за съкращението)

(П∃) $\dfrac{\mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\exists \mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{B}}$, където $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$

Тъй като схемите за съждителните аксиоми и за първите четири правила са същите като тези на съждителното смятане, всички разсъждения, които направихме на съждителното смятане остават в сила. Единственото нещо, което трябва да направим за да можем да формулираме коректно теоремата за тавтологиите, е да формулираме понятието тавтология за формална система от първи ред.

Дефиниция 2.10. Казваме, че формулата $\mathbf{A}$ на формалната система от първи ред $\mathcal{F}$ е тавтология, ако $\mathbf{A}$ се получава от съждителна тавтология $\mathbf{B}$, замествайки съждителни ѝ променливи $P_{i_0}, P_{i_1}, \ldots P_{i_n}$ съответно с формули $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ на $\mathcal{F}$.

Например, от съждителната тавтология

$$(P_0 \,\&\, P_1) \to P_1,$$

можем да получим тавтологиите на $\mathcal{F}$

$$(x = x \,\&\, x = y) \to x = y \quad \text{и} \quad (x \neq y \,\&\, z = y) \to z = y.$$

Вече сме готови да формулираме теоремата за тавтологиите на предикатното смятане от първи ред.

Теорема 2.11 (Теорема за тавтологиите)**.** Нека формулата $\mathbf{A}$ е тавтологично следствие (в $\mathcal{F}$) на формулите $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ (т.е. формулата $\mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}$ е тавтология на $\mathcal{F}$). Тогава, ако $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i$ за $1 \leq i \leq n$, то $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$.

Нека отбележим, че теоремата за тавтологии следва изцяло от съждителните аксиоми ($\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$) и съждителните правила (ПР, ПСв, ПА и ПС). Нещо повече, всяко едно от заключенията на правилата (ПР), (ПСв), (ПА) и (ПС) са тавтологични следвия на съответните хипотези, т.е. тези правила са частен случай на теоремата за тавтологиите.

В по-нататъчните ни разглеждания ще имаме нужда от следното твърдение.

Теорема 2.12. Нека * е (синтактична) операция върху формули, такава че $(\neg\mathbf{A}^*) \equiv \neg\mathbf{A}^*$ и $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^* \equiv \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$.

С други думи операцията * „преминава“ през отрицанието и дизюнкция, а оттук и през останалите логически връзки (конюнкция, импликация и еквивалентност).

Доказателство. (Идея) Нека $\mathbf{A}$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, т.е. $\mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}$ е тавтология. Следователно тази формула се получава от съждителна тавтология, да речем $\mathbf{B}$, замествайки съждителните ѝ променливи $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ съответно с предикатни формули $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$. Тъй като * преминава през отрицанието и дизюнкцията, то

$$(\mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{A})^* \equiv \mathbf{A}_1^* \to \cdots \mathbf{A}_n^* \to \mathbf{A}^*$$

и тази формула се получава от $\mathbf{B}$, замествайки $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ съответно с формулите $\mathbf{B}_1^*, \ldots, \mathbf{B}_n^*$. Оттук $\mathbf{A}_1^* \to \cdots \mathbf{A}_n^* \to \mathbf{A}^*$ е тавтология и значи $\mathbf{A}^*$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_1^*, \ldots, \mathbf{A}_n^*$.

□