2.4 Породени правила за кванторите

Следващата ни задача е да изведем допълнителни правила, с чиято помощ да улесним процеса на формално доказателство.

(П$\forall$) $\dfrac{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}{\mathbf{A}\to\forall\mathbf{x}\mathbf{B}}$, където $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{A}$.

Доказателство.

$\forall\mathbf{x}$ е съкращение за $\neg\exists\mathbf{x}\neg$

$$\begin{array}{cl} \mathbf{A}\to\mathbf{B} & \\ \hline \neg\mathbf{B}\to\neg\mathbf{A} & (\text{ТТ}) \\ \hline \exists\mathbf{x}\neg\mathbf{B}\to\neg\mathbf{A} & (\text{П}\exists) \\ \hline \mathbf{A}\to\forall\mathbf{x}\mathbf{B} & (\text{ТТ}) \end{array}$$

□

(ПОб) $\dfrac{\mathbf{A}}{\forall\mathbf{x}\mathbf{A}}$ (правило за обобщението)

Доказателство.

$$\begin{array}{cl} \mathbf{A} & \\ \hline \neg\mathbf{A}\to\forall\mathbf{x}\mathbf{A} & (\text{ТТ}) \\ \hline \exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}\to\forall\mathbf{x}\mathbf{A} & (\text{П}\exists) \\ \hline \forall\mathbf{x}\mathbf{A} & (\text{ТТ}) \end{array}$$

□

(ТСуб) $\dfrac{}{\forall\mathbf{x}\mathbf{A}\to\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]}$ (теорема за субституцията)

Доказателство.

$(\neg\mathbf{A})_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]\equiv\neg\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]$

$$\begin{array}{cl} & \\ \hline \neg\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]\to\exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A} & (\text{АксСуб}) \\ \hline \forall\mathbf{x}\mathbf{A}\to\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}] & (\text{ТТ}) \end{array}$$

□

Нека $\mathbf{A}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ (необезателно различни). Тогава формулата $\forall\mathbf{x}_1\ldots\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A}$ ще наричаме *универсално затваряне* на $\mathbf{A}$.

Да отбележим, че универсалното затваряне на една формула не е еднозначно определено. То зависи, както от избора на реда на променливите, така и от избор на променливи, неучастващи свободно във формулата.

Твърдение 2.13. Всяка формула е равнодоказуема с всяко свое универсално затваряне.

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ е формула и $\mathbf{A}'\equiv\forall\mathbf{x}_1\ldots\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A}$ е нейно универсално затваряне. Нека първо $\mathbf{A}$ е теорема. Тогава

$$\begin{array}{cl} \mathbf{A} & \\ \hline \forall\mathbf{x}_n\mathbf{A} & (\text{ПОб}) \\ \hline \forall\mathbf{x}_{n-1}\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A} & (\text{ПОб}) \\ \hline & (\text{ПОб}) \\ \vdots & \\ \hline \forall\mathbf{x}_2\ldots\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A} & (\text{ПОб}) \\ \hline \mathbf{A}' & (\text{ПОб}) \end{array}$$

Обратно, нека $\mathbf{A}'$ е теорема. Тогава

$$\dfrac{\mathbf{A}' \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{A}' \to \forall \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\,(\text{ТСуб}) \quad \dfrac{}{\forall \mathbf{x}_2 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x}_3 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\,(\text{ТСуб}) \quad \ldots \dfrac{}{\forall \mathbf{x}_1 \mathbf{A} \to \mathbf{A}}\,(\text{ТСуб})}{\mathbf{A}' \to \mathbf{A}}\,(\text{ТТ})}{\mathbf{A}}\,(\text{ТТ})$$

$\square$

(ПЗ) $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]}$ (правило за замяната)

Доказателство. Нека първо $n = 1$, т.е имаме формула $\mathbf{A}$ променлива $\mathbf{x}$ и терм $\mathbf{a}$, подходящ за замяна на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{A}$. Тогава

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A}}\,(\text{ПОб}) \quad \dfrac{}{\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]}\,(\text{ТСуб})}{\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]}\,(\text{ТТ})$$

Променливите $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ не се срещат в $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ и са различни от $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Нека сега $n > 1$, $\mathbf{A}$ е формула, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ са различни променливи и $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ са термове, подходящи за замяна на $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ в $\mathbf{A}$. Нека $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ са нови, различни променливи. Нека $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n]$. Заради избора на променливите $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ имаме

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n] &\equiv \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1}[\mathbf{y}_1]_{\mathbf{x}_2}[\mathbf{y}_2] \ldots_{\mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_n], \\ \mathbf{B}_{\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] &\equiv \mathbf{B}_{\mathbf{y}_1}[\mathbf{a}_1]_{\mathbf{y}_2}[\mathbf{a}_2] \ldots_{\mathbf{y}_n}[\mathbf{a}_n] \end{aligned}$$

като при това

$$\mathbf{B}_{\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \equiv \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$$

Следователно, прилагайки $2n$-пъти първият случай, получаваме

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1}[\mathbf{y}_1]}}{\vdots}}{\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1}[\mathbf{y}_1]_{\mathbf{x}_2}[\mathbf{y}_2] \ldots_{\mathbf{x}_{n-1}}[\mathbf{y}_{n-1}]}}{\dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}_{\mathbf{y}_1}[\mathbf{a}_1]}}}{\begin{array}{c}\vdots \\ \mathbf{B}_{\mathbf{y}_1}[\mathbf{a}_1]_{\mathbf{y}_2}[\mathbf{a}_2] \ldots_{\mathbf{y}_{n-1}}[\mathbf{a}_{n-1}] \\ \hline \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]\end{array}}$$

$\square$

(Тсуб) $\dfrac{}{\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \to \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}$ $\qquad$ $\dfrac{}{\forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]}$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{A} \to \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\,(\text{АСуб}) \quad \dfrac{}{\exists \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \exists \mathbf{x}_{n-1} \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\,(\text{АСуб}) \quad \ldots \dfrac{}{\exists \mathbf{x}_2 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A} \to \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\,(\text{АСуб})}{\mathbf{A} \to \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\,(\text{ТТ})}{\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \to \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n \mathbf{A}}\,(\text{ПЗ})$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\forall\mathbf{x}_1\ldots\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A}\to\forall\mathbf{x}_2\ldots\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A}}\text{(ЛСуб)}\quad\dfrac{}{\forall\mathbf{x}_2\ldots\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A}\to\forall\mathbf{x}_3\ldots\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A}}\text{(ЛСуб)}\quad\ldots\dfrac{}{\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A}\to\mathbf{A}}\text{(ЛСуб)}}{\dfrac{\forall\mathbf{x}_1\ldots\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A}\to\mathbf{A}}{\forall\mathbf{x}_1\ldots\forall\mathbf{x}_n\mathbf{A}\to\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n]}\text{(ПЗ)}}\text{(ТТ)}$$

□

(П∃∃) $\dfrac{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}{\exists\mathbf{A}\to\exists\mathbf{B}}$	(П∀∀) $\dfrac{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}{\forall\mathbf{A}\to\forall\mathbf{B}}$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}\to\mathbf{B}\quad\dfrac{}{\mathbf{B}\to\exists\mathbf{x}\mathbf{B}}\text{(АСуб)}}{\mathbf{A}\to\exists\mathbf{x}\mathbf{B}}\text{(ТТ)}}{\exists\mathbf{A}\to\exists\mathbf{B}}\text{(П∃)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall\mathbf{x}\mathbf{A}\to\mathbf{A}}\text{(ТСуб)}\quad\mathbf{A}\to\mathbf{B}}{\forall\mathbf{x}\mathbf{A}\to\mathbf{B}}\text{(ТТ)}}{\forall\mathbf{A}\to\forall\mathbf{B}}\text{(П∀)}$$

□

2.5 Теорема за еквивалентната замяна. Теорема за варианта

В следващата теорема ще докажем добре познатото правило, че еквивалентни твърдения са взаимнозаменяеми.

Теорема 2.14. Нека формулата $\mathbf{A}'$ се получава от формулата $\mathbf{A}$, замествайки нула, едно, няколко или всички срещания на формулите $\mathbf{B}_1,\ldots,\mathbf{B}_n$ съответно с формулите $\mathbf{B}'_1,\ldots,\mathbf{B}'_n$. Тогава, ако $\mathbf{B}_i\leftrightarrow\mathbf{B}'_i$ е теорема за $1\leq i\leq n$, то $\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{A}'$ също е теорема.

Доказателство. Достатъчно е да докажем теоремата в случая $n=1$. Нека $\mathbf{B}\leftrightarrow\mathbf{B}'$ е теорема. Ще докажем с индукция по построението на формулата $\mathbf{A}$, че ако $\mathbf{A}'$ се получава от $\mathbf{A}$ чрез заместване на $\mathbf{B}$ с $\mathbf{B}'$, то $\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{A}'$ е теорема.

Нека първо разгледаме случая $\mathbf{A}'\equiv\mathbf{A}$ (той се получава, когато не извършваме никакви замени, или пък $\mathbf{B}\equiv\mathbf{B}'$). Тогава $\vdash_{\mathcal{F}}\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{A}'$ съгласно (ТТ).

Нека сега $\mathbf{A}\not\equiv\mathbf{A}'$. Тогава най-простата възможност е $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$. В този случай $\mathbf{A}'\equiv\mathbf{B}'$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}}\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{A}'$ по условие. Остава да разгледаме случая $\mathbf{A}\not\equiv\mathbf{B}$ (продължавайки да предполагаме $\mathbf{A}\not\equiv\mathbf{A}'$).

Нека първо $\mathbf{A}\equiv\mathbf{C}\vee\mathbf{D}$. Тогава тъй като всяка подформула на $\mathbf{A}$, различна от $\mathbf{A}$, е или подформула на $\mathbf{C}$, или подформула на $\mathbf{D}$, то $\mathbf{A}'\equiv\mathbf{C}'\vee\mathbf{D}'$, където $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{D}'$ са получени от $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ чрез замени на $\mathbf{B}$ с $\mathbf{B}'$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}}\mathbf{C}\leftrightarrow\mathbf{C}'$ и $\vdash_{\mathcal{F}}\mathbf{D}\leftrightarrow\mathbf{D}'$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}}\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{A}'$ съгласно (ТТ).