Лекция 6: Комбинаторни конфигурации (структури)

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

23 април 2020 г.

Дадено е *опорно множество* $A = \{a_1, a_2 \ldots a_n\}$, от чиито елементи ще изграждаме комбинаторните конфигурации. На английски терминът е *ground set*.

Конфигурациите (структурите) може да се изграждат с наредба или без наредба, а също така и с повтаряне или без повтаряне. Това дава общо четири възможности. "Наредба" означава линейна наредба.

С "m" означаваме *големината* на дадена конфигурация. Тоест, броят на елементите в нея.

Конфигурации с наредба и повтаряне

Множеството от конфигурациите с наредба и повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с "$K_{\text{Н,П}}(n, m)$". Елементите му са наредените m-торки (векторите с големина m), чиито елементи са от опорното множество A. Лесно се вижда, че $K_{\text{Н,П}}(n, m) = A^m$.

Интересува ни $|K_{\text{Н,П}}(n, m)|$. С обобщения принцип на умножението извеждаме

$$K_{\text{Н,П}}(n, m)| = |A^m| = n^m \tag{1}$$

Конфигурации с наредба и повтаряне (2)

Пример

Нека $A = \{a, b, c\}$. Нека $m = 2$. Тогава $K_{\text{Н,П}}(3, 2) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

Конфигурации с наредба, без повтаряне

Множеството от конфигурациите с наредба, без повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с "$K_{\text{H}}(n, m)$". Елементите му са наредените m-торки (векторите с големина m) без повтаряне, чиито елементи са от опорното множество A.

Интересува ни $|K_{\text{H}}(n, m)|$. Представяме си процеса на изграждането на някой от тези вектори. За първата позиция можем да изберем всеки елемент на A, следователно имаме n възможности. За втората позиция имаме само $n - 1$ възможности, защото елементът от A, избран за първата позиция, вече не може да се ползва. Аналогично, за третата позиция има само $n - 2$ възможности, и така нататък, за m-тата позиция имаме само $n - (m - 1)$ възможности.

Виждаме, че

$$|K_{\text{H}}(n,m)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1) \qquad (2)$$

$n-m+1$ идва от $n-(m-1)$.

Дясната страна на (2) може да се напише и като $\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)$, а освен това и като $n^{\underline{m}}$. Последното се чете "n на падаща степен m".

Този резултат **не се получава от принципа на умножението**.

Резултатът остава в сила и при $m > n$. Тогава дясната страна на (2) е нула.

Нека $A = \{a, b, c\}$. Нека $m = 2$. Тогава
$K_{\text{H}}(3, 2) = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$.

Това **не е изведено чрез принципа на умножението**. Имаме $|K_{\text{H}}(3, 2)| = 3 \cdot 2 = 3^{\underline{2}} = 6$, но $K_{\text{H}}(3, 2)$ **не е декартово произведение** нито на триелементно и двуелементно множество, нито на шестелементно и едноелементно множество. Както на първа, така и на втора позиция се срещат и трите елемента на A.

Нека $A = \{a, b, c\}$. Нека $m = 4$. Но $K_{\mathrm{H}}(3, 4) = \varnothing$, тъй като е невъзможно да не потворим елемент от A съгласно принципа на Dirichlet.

Забележете, че дясната страна на (2) става именно нула:

$$3^{\underline{4}} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Не е необходимо да изискваме $m \leqslant n$.

Важен частен случай е $n = m$. Тогава векторите се наричат *пермутации*. Пермутациите на n на брой, два по два различни обекта (pairwise dictinct), са разполаганията в линейна наредба на тези обекти.

Дясната страна на (2) става $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$. Това бележим с "$n!$". Чете се "ен-факториел", на английски е *factorial*. И така,

$$\left|K_{\mathrm{H}}(n, n)\right| = n!$$

Примерно, по колко начина могат да се наредят 12 човека в редица? Отговорът е $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600$.

В сила е $0! = 1$. Комбинаторно, това може да се изведе така: по колко начина можем да разположим нула обекта в редица? Отговор: по един начин, а именно празния начин.

Алгебрично, същото можем да изведем така:

$$\prod_{k \in \emptyset} k = 1$$

Вземаме неутралния елемент на умножението, който е единица, а не нула. Нулата е неутрален например на събирането.

Множеството от конфигурациите с наредба, без повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с "$K(n,m)$". Елементите му са m-елементните подмножества на опорното множество A.

Наричат се още *комбинации*. Този термин обаче се използва широко за какво ли не. Точният термин е "подмножество".

Конфигурации без наредба и без повтаряне (2)

Интересува ни $|K(n, m)|$. Пресмята се от $|K_{\text{Н}}(n, m)|$ чрез принципа на делението. Въвеждаме релация $R \subseteq K_{\text{Н}}(n, m) \times K_{\text{Н}}(n, m)$ така:

$$\forall X, Y \in K_{\text{Н}}(n, m) : X\, R\, Y \;\leftrightarrow\; X \text{ и } Y \text{ имат едни и същи елементи}$$

R е релация на еквивалентност. Всеки неин клас на еквивалентност има кардиналност $m!$, а $|K(n, m)|$ е броят на класовете на еквивалентност, като

$$|K(n, m)| = \frac{|K_{\text{Н}}(n, m)|}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!} \tag{3}$$

Пример с фиш от тото 6/49. Колко са възможните фишове? Отговорът $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$ е грешен.

Верният отговор е

$$\frac{10\,068\,347\,520}{6!} = \frac{10\,068\,347\,520}{720} = 13\,983\,816$$

Причината да делим на $6! = 720$ е, че няма значение в какъв ред се изтеглят числата. Ако и редът на изтегляне имаше значение, фишовете наистина щяха да са $10\,068\,347\,520$. Но това би била друга игра.

Понякога (3) се записва така:

$$|K(n,m)| = \frac{n!}{(n-m)!m!} \tag{4}$$

Въпреки че (4) е по-кратък и “по-спретнат” запис, като алгоритъм (3) е по-бърз.

Дясната страна на (3) и (4) се нарича *биномен коефициент*, на английски *binomial coefficient*, и се бележи кратко с “$\binom{n}{m}$”. Чете се “ен-над-ем”, на английски “n-choose-m”. И така,

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!}$$

n е *горен индекс*, а m е *долен индекс*. Да не се бърка $\binom{n}{m}$ с $\left(\frac{n}{m}\right)$.

Дефинираме $\binom{n}{m}$ за $m, n \in \mathbb{N}$. Ако $m > n$, то $\binom{n}{m} = 0$, което има комбинаторен смисъл: има нула начина да изберем m елементно подмножество на A, ако $|A| = n$ и $m > n$.

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Също има комбираторен смисъл: има точно един начин да изберем нула неща от n (не избираме нищо, тоест избираме празното множество) и има точно един начин да изберем n неща от n (избираме всичко).

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Има n начина да изберем едно нещо от n. Има n начина да изберем $n-1$ неща от n.

Изобщо, при $m \leqslant n$, в сила е $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$. Това също има комбинаторен смисъл: като брой начини да го сторим, все едно е дали избираме m неща от n или $n-m$ неща от n. Примерно, тото 6/49 можеше да е 43/49.

При фиксиран горен индекс n, сумата от всички биномни коефициенти е 2^n:

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{n} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} = 2^n \tag{5}$$

И това има комбинаторен смисъл. Дясната страна брои всички подмножества на n-елементно множество, а знаем, че те са 2^n; това се извежда тривиално с броене на характеристичните вектори с дължина n, които са $|\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$. Лявата страна брои разбиването на всички подмножества по кардиналности.

Това е пример за *доказателство с комбинаторни съображения*, или *принцип на двукратното броене*.

Ако $n, m \geqslant 1$, в сила е

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \tag{6}$$

Доказателство: с комбинаторни съображения. Лявата страна брои m-елементните подмножества на n-елементно множество A. Дясната страна брои същото, но по-детайлно. Фиксираме произволен $a \in A$.

- m-елементните подмножества, които **не съдържат** a, са $\binom{n-1}{m}$, защото $|A \setminus \{a\}| = n - 1$, а $A \setminus \{a\}$ е множеството, от което можем да избираме.
- m-елементните подмножества, които **съдържат** a, са $\binom{n-1}{m-1}$, защото след като изберем a, останалите $m - 1$ на брой пак избираме от $A \setminus \{a\}$.

По принципа на разбиването $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$.

Клетката на ред n и колона k съдържа $\binom{n}{k}$. Всеки "вътрешен" елемент е сумата от елемента над него и елемента горе вляво; тоест, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Теорема 1 (Newton)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

“Бином” означава буквално “двуименник”. На български е прието “двучлен”. Имената са x и y.

Доказателство: с комбинаторни съображения. Лявата страна записваме като

$$\underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ \cdots\ \cdot(x+y)\cdot(x+y)}_{n \text{ множителя}}$$

Очевидно след отварянето на скобите ще се получи сума от 2^n събираеми от вида $x^k y^{n-k}$, по всички $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Разбиваме множеството от събираемите в $n+1$ множества по степента на x (която диктува степента на y): x^0y^n, x^1y^{n-1}, ..., x^ny^0. Коефициентът пред x^ky^{n-k} е броят на появите на това събираемо. За да определим този брой, съобразяваме, че x^k "идва" от k на брой множителя (останалите множители дават y^{n-k}). А тези k множителя можем да изберем от всички n множителя по $\binom{n}{k}$ начина.

Примерно, x^ny^0 се появява само веднъж, понеже за него трябва да "дойде" x от всеки множител. $x^{n-1}y^1$ се появява точно n пъти, защото от един множител "идва" y, от останалите, x, а този един множител можем да изберем по n начина. И така нататък. $\square$

С Теоремата на Newton лесно извеждаме (5): полагаме $x = y = 1$.

Лесно доказваме и

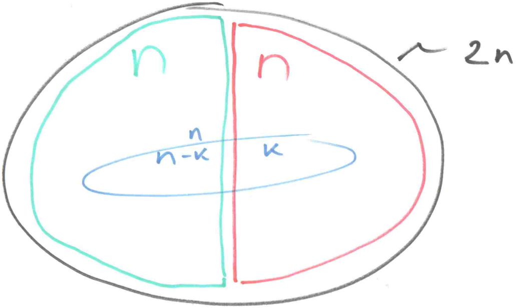
$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Записваме лявата страна като $(2+1)^n$, дясната страна като $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}$ и прилагаме Теорема 1.

Ще докажем с комбинаторни разсъждения, че

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$



По колко начина можем да сложим p единици и q нули в редица?

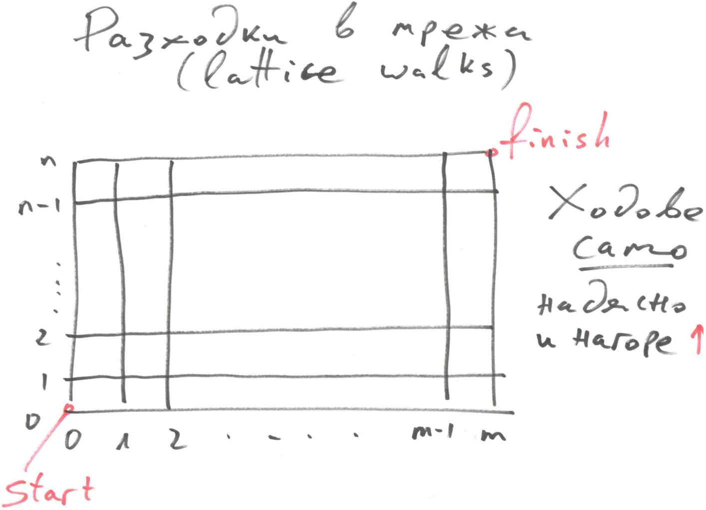
Общо $p + q$ булеви цифри. Това са характеристичните вектори с дължина $p + q$ и точно p единици. Те съответстват биективно на p-елементните подмножества на $(p + q)$-елементно множество. Ние вече знаем колко са тези подмножества: $\binom{p+q}{p}$. Тогава и въпросните характеристични вектори са толкова.

Можем да го запишем и като $\binom{p+q}{q}$.

Ще докажем с комбинаторни разсъждения

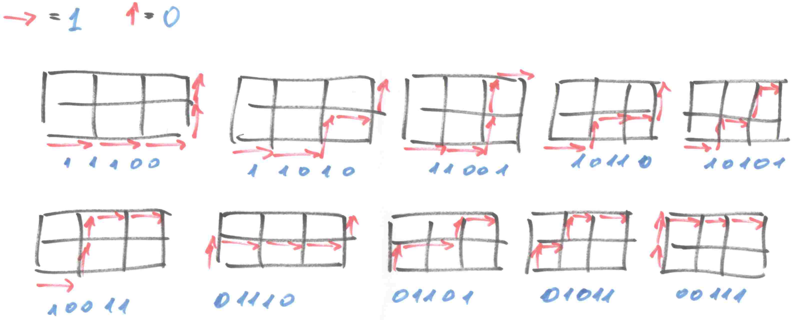
$$\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k} \tag{7}$$

Това може да се докаже и алгебрично с (6), но комбинаторното доказателство е интересно.


Разходки в мрежа
(lattice walks)
finish
start
n
n-1
2
1
0
0 1 2 . . . . . m-1 m
Ходове само надясно и нагоре ↑

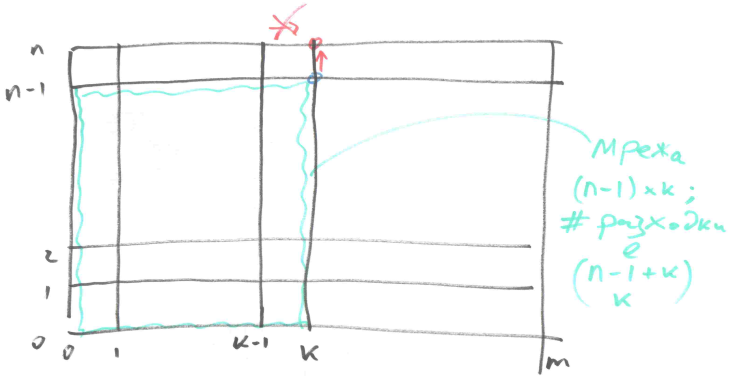
Конфигурации без наредба и без повтаряне (16)

Свойства на биномния коефициент (10)



При $m=3$, $n=2$, # на разходките е $10 = \binom{2+3}{2} = \binom{2+3}{3}$. Това не е случайно!

В $n \times m$ мрежа, # на разх. е $\binom{n+m}{m}$



$0 \leq k \leq m$

Разбиваме разходките по k:
Вертикалът, на който за пръв път
"излизаме" най-горе; $\binom{n+m}{m} = \sum\limits_{0 \leq k \leq m} \binom{n-1+k}{k}$

Конфигурации без наредба, с повтаряне (1)

Комб конф с повт, без нар.

$K_{\Pi}(n, m)$

Елементите са
мултим-вата/с големина m
над n-ел. опорно м-во.

$|K_{\Pi}(n, m)| = ?$

Конфигурации без наредба, с повтаряне (2)

Нека $A = \{a, b\}$, нека $m = 5$.

$$
\begin{aligned}
K_\Pi(2,5) = \{ & \{a,a,a,a,a\}_M, \\
& \{a,a,a,a,b\}_M, \\
& \{a,a,a,b,b\}_M, \\
& \{a,a,b,b,b\}_M, \\
& \{a,b,b,b,b\}_M, \\
& \{b,b,b,b,b\}_M \}
\end{aligned}
$$

Нека $A = \{a, b\}$, нека $m = 5$.

$$
Кп(2,5) = \{ \{a, a, a, a, a\}_M, \{a, a, a, a, b\}_M, \{a, a, a, b, b\}_M, \{a, a, b, b, b\}_M, \{a, b, b, b, b\}_M, \{b, b, b, b, b\}_M \}
$$

Конфигурации без наредба, с повтаряне (4)

$$A = \{a, b, c\}. \quad |K_{п}(3,5)| = ?$$

$$K_{п}(3,5) = \{ \; \{a,a,a,a,a\}_{M}, \quad K_{п}(2,5)$$

$$\dots$$

$$\{b,b,b,b,b\}_{M},$$

$$\{a,a,a,a,c\}_{M},$$

$$\dots$$

$$\{a,b,b,c,c\}_{M},$$

$$\vdots$$

$$\{c,c,c,c,c\}_{M} \; \}$$

Конфигурации без наредба, с повтаряне (5)

$A = \{a, b, c\}. \quad |K_п(3,5)| = ?$

$$K_п(3,5) = \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \{a, a, a, a, a \| \}_м, \\ \quad \ldots \\ \{ | b, b, b, b, b | \}_м, \end{array}\right\} K_п(2,5) \\ \{a, a, a, a, \| c\}_м, \\ \quad \ldots\ldots \\ \{a, | b, b, | c, c\}_м, \\ \quad \vdots \\ \{ \| c, c, c, c, c\}_м \end{array} \right\}$$

$A = \{a, b, c\}$. $\quad |K_п(3,5)| = ?$

$$K_п(3,5) = \Big\{ \underbrace{\{a,a,a,a,a\}_м, \ \{b,b,b,b,b\}_м}_{K_п(2,5)}, \ \{a,a,a,a,c\}_м, \ \dots,$$

$$* \mid * * \mid * * \ = \ \{a \mid b, b \mid c, c\}_м, \ \vdots, \ \{c,c,c,c,c\}_м \Big\}$$

m '$*$'

$n-1$ '$|$'

$$K_п(n,m) = \binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$$

12 еднакви билета се раздават на 10 човека. По колко начина може да стане това?

Решение: множеството от хората е опорното множество. Броят на билетите е големината на конфигурацията. Тогава $n = 10$, $m = 12$. Отговорът е

$$\binom{12+10-1}{12} = \binom{12+10-1}{10-1} = 293\,930$$

Едно от раздаванията:

$$* \; * \; | \; | \; | \; | \; * \; * \; * \; | \; | \; * \; | \; * \; * \; * \; * \; * \; | \; * \; |$$

Първи човек с два билета; втори, трети и четвърти с по нула билети, петия човек с три билета, шестият без билети, седмият с един билет, осмият с пет билета, деветият с един билет и десетият без билети.

Колко са фишовете в 6 от 49, ако след изтегляне на топка тя бива връщана отново в сферата?

Отговор:

$$\binom{49+6-1}{6} = 25\,827\,165$$

Аранжор на витрина в плод-зеленчук трябва да сложи в редица 10 ябълки, 15 круши и 20 кивита. По колко начина може да го стори, ако плодовете от всеки вид са неразличими?

Първо решение. Общо са 45 плодове. Представяме си процеса на нареждането. Започва с 45 свободни "слота".

- Първо слага ябълките. Има $\binom{45}{10} = 3\,190\,187\,286$ начина.
- На останалите 35 свободни слотове слага крушите. Има $\binom{35}{15} = 3\,247\,943\,160$ начина.
- На останалите 20 свободни слотове слага кивитата. Има $\binom{20}{20} = 1$ начина

Отговорът е $\binom{45}{10} \cdot \binom{35}{15} \cdot \binom{20}{20} = 10\,361\,546\,974\,682\,663\,760$.

Може да започнем с крушите, а после ябълките и накрая кивитата. Тогава отговорът е
$\binom{45}{15} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{20} = 10\,361\,546\,974\,682\,663\,760.$

А може да започнем с кивитата, после крушите и накрая ябълките. Тогава отговорът е
$\binom{45}{20} \cdot \binom{25}{15} \cdot \binom{10}{10} = 10\,361\,546\,974\,682\,663\,760.$

Естествено, отговорът не зависи от реда на слагане на видовете плодове. Всеки от $3! = 6$ различни избора на първи, втори и трети вид плод води до един и същи отговор.

Друго решение. В началото всеки от 45-те плодове има идентичност. Има $45! = 119\,622\,220\,865\,480\,194\,561\,963\,161\,495\,657\,715\,064\,383\,733\,760\,000\,000\,000$ начина за слагането им.

После правим 10 от тях неразличими помежду си, други 15 неразличими помежду си и останалите 20 също неразличими помежду си. По принципа на делението, начините стават

$$\frac{45!}{10! \cdot 15! \cdot 20!} = 10\,361\,546\,974\,682\,663\,760$$

Да разгледаме тринома $(x + y + z)^{45}$. Ясно е, че отварянето на скобите води до събираеми от вида $x^k y^\ell z^m$, където $k + \ell + m = 45$. Какъв е коефициента пред $x^{10}y^{15}z^{20}$?

Отговорът е $\binom{45}{10} \cdot \binom{35}{15} \cdot \binom{20}{20} = 10\,361\,546\,974\,682\,663\,760$.

Еден начин да стигнем до този отговор е: пита се, колко са събираемите $x^{10}y^{15}z^{20}$ след отваряне на скобите? Вземаме десет x-а от 45 множителя, има $\binom{45}{10}$ да изберем кои множители. От останалите 35 множителя избираме 15 за y-ците, има $\binom{35}{15}$ начина. За z-овете има един избор.

Друг начин да запишем същия отговор е $\frac{45!}{10! \cdot 15! \cdot 20!}$.

Това е обобщение на Нютоновия бином:

$$(x+y+z)^n = \sum_{k+\ell+m=n} \frac{n!}{k!\cdot \ell! \cdot m!} x^k y^\ell z^m$$

Изразът $\frac{n!}{k!\cdot\ell!\cdot m!}$, където $k+\ell+m=n$, има същата стойност като $\binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{\ell}$ и се нарича *триномен коефициент*.

Още по-голямо обобщение е

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

Изразът $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}$, където $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, има същата стойност като $\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} \cdot \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \cdots \binom{n - n_1 - \cdots - n_{k-1}}{n_k}$ и се нарича *мултиномен коефициент*.

Още се пише $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Биномният коефициент $\binom{n}{k}$ е $\binom{n}{k, n-k}$.

Мултиномният коефициент брои пермутации с повторения (на мултимножество). Биномният коефициент брои пермутации на мултимножество с два вида елементи; примерно, 0 и 1. Или ябълки и круши.

Обикновените пермутации са частен случай на пермутации с повторения, също както обикновените множества са частен случай на мултимножества. Така че

$$n! = \binom{n}{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}} = \frac{n!}{\underbrace{1! \cdot 1! \cdot \cdots \cdot 1!}_{n}}$$

Дадена е група A от n студента. Дадени са $k, \ell \in \mathbb{N}$, такива че $k + \ell \leqslant n$. По колко начина можем да изберем подгрупа B от k студента и подгрупа C от ℓ студента, така че факултетните номера на хората от B да са по-малки от фак. номера на хората от C?

Първо решение. По принципа на разбиването:

$$\sum_{j=k}^{n-\ell} \binom{j-1}{k-1} \cdot \binom{n-j}{\ell}$$

Второ решение. Достатъчно е да изберем $k + \ell$.

$$\binom{n}{k+\ell}$$

Какво е добър отговор на комбинаторна задача (2)

Второто решение е по-добро, защото е по-бърз алгоритъм. Върху Maple 2018 (tm), за $n = 10\,000$, $k = \ell = 500$, имплементацията на второто решение отнема около 0.031 секунди, а на първото, около 20.859 секунди.

Всяка смислена формула задава алгоритъм. Добро е решение е формула, която задава бърз алгоритъм. А не формула, която е кратка и "спретната". За първото решение ние може да си дефинираме нотация

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k; \ell \end{matrix} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=k}^{n-\ell} \binom{j-1}{k-1} \cdot \binom{n-j}{\ell}$$

но това си остава бавен алгоритъм.

КРАЙ