Релации

Казвайки "релация" без допълнителни уточнения, имаме предвид релация от вида $R \subseteq A \times A$. Когато казваме "крайна релация", имаме предвид, че множеството е крайно. Казвайки "релация над A", имаме предвид, че A е въпросното множество. Казвайки "релация над декартовия квадрат $A \times A$" имаме предвид същото нещо, а именно, че $R \subseteq A \times A$; а **не** че $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$. Фактът, че $a \in A$ и $b \in A$ са в релация бележим с "$(a, b) \in R$" или с по-краткия запис "aRb".

Определение 1. *Нека R е релация над A. Нека домейните за a, b и c са A.*

- R *е* рефлексивна*, ако* $\forall a(aRa)$.
- R *е* антирефлексивна*, ако* $\forall a(\neg aRa)$.
- R *е* симетрична*, ако* $\forall a \forall b(aRb \rightarrow bRa)$.
- R *е* антисиметрична*, ако* $\forall a \forall b(aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$.
- R *е* силно антисиметрична*, ако* $\forall a \forall b\big(a \neq b \rightarrow ((aRb \wedge \neg bRa) \vee \neg(aRb \wedge bRa))\big)$.
- R *е* транзитивна*, ако* $\forall a \forall b \forall c(aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$.

Когато се каже, изследвайте релацията R за шестте свойства*, се разбира следното: за всяко от шестте изброени горе свойства, да се определи дали R притежава това свойство, или не.* □

Дадена крайна релация може да се опише в явен вид по три начина. Може да се изброят в явен вид наредените двойки, които ѝ принадлежат, може да се състави матрицата ѝ (което е същото нещо, написано по-кратко и прегледно), и може да се нарисува графът ѝ.

Зад. 1 Нека $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 21\}$. Опишете в явен вид релацията R и по трите начина, ако R е дефинирана така: за всеки a и b от A, aRb тогава и само тогава, когато

1. $a = b$
2. $a \neq b$
3. $a + b = 2$
4. $a * b = 2$
5. $\exists k \in \mathbb{N}(a + b = 2k)$
6. a дели b

7. $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ са взаимно прости[†]

Решение: Ще решим 5. Преведено на естествен език, условието казва, че всеки два елемента са в релация тогава и само тогава, когато сумата им е четно (неотрицателно) число.

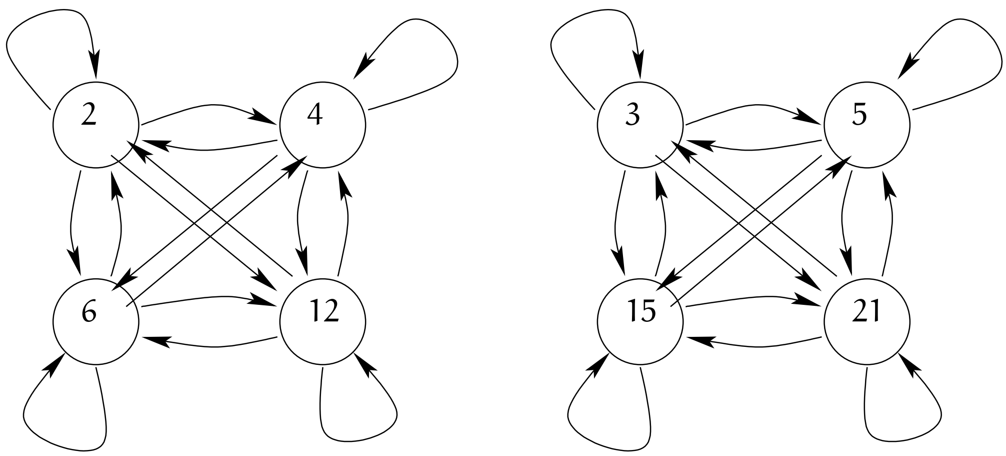
Първи начин

$$\begin{aligned} R = \big\{ & (2,2),(2,4),(2,6),(2,12),(3,3),(3,5),(3,15),(3,21),(4,2),(4,4),(4,6),(4,12),\\ & (5,3),(5,5),(5,15),(5,21),(6,2),(6,4),(6,12),(12,2),(12,4),(12,6),(12,12),\\ & (15,3),(15,5),(15,15),(15,21),(21,3),(21,5),(21,15),(21,21)\big\} \end{aligned}$$

Втори начин (нулите не са написани)

	2	3	4	5	6	12	15	21
2	1		1		1	1		
3		1		1			1	1
4	1		1		1	1		
5		1		1			1	1
6	1		1		1	1		
12	1		1		1	1		
15		1		1			1	1
21		1		1			1	1

Трети начин



[†]Две естествени числа $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$, такива че $\mathfrak{m} \geq 2$ и $\mathfrak{n} \geq 2$, са *взаимно прости*, ако единственото цяло положително число, което ги дели и двете, е единицата.

Зад. 2 За всяка от релациите от предната задача, изследвайте релацията за шестте свойства.

Решение: Ще изследваме 7.

- Релацията не е рефлексивна, понеже всяко от числата е различно от 1 и се дели на себе си.

- Релацията е антирефлексивна – по същата причина, а именно, че никое от числата не е взаимно просто със себе си.

- Релацията е симетрична, тъй като за всяко цяло положително число k, това число или е общ делител на две числа m и n, или не е. Дали казваме "на m и n" или "на n и m", няма значение.

  По-формално можем да кажем същото нещо така. Нека $Q(m, n, k)$ е триместен предикат, в който домейните на първата и втората променлива са $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, а на третата променлива е $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (тоест $\mathbb{N}^+$). Нека $Q(m, n, k)$ е истина тогава и само тогава, когато k е общ делител на m и n. Нека $P(m, n)$ е предикатът "m и n са взаимно прости" с домейни $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Предикатът $P(m, n)$ можем да изразим така:

  $$P(m, n) : \quad \forall k (Q(m, n, k) \rightarrow k = 1)$$

  Тъй като $\forall m \forall n \forall k (Q(m, n, k) \leftrightarrow Q(n, m, k))$, то релацията е симетрична.

- Релацията не е антисиметрична, понеже можем да посочим поне две числа x и y от дадените, такива че xRy и yRx, примерно 2 и 4.

- Релацията не е силно антисиметрична, понеже е симетрична (симетричността и силната антисиметричност са несъвместими).

- Релацията не е транзитивна. Като контрапример: 6 и 5 са взаимно прости, 5 и 21 са взаимно прости, но 6 и 21 не са (имат общ делител 3).

Определение 2. *Нека* $R \subseteq A \times B$ *е двуместна релация.* Обратната релация на R *е релацията* $R^{-1} = \{(a, b) \,|\, a \in B \wedge b \in A \wedge (b, a) \in R\}$. Релацията-допълнение на R *е релацията* $\overline{R} = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B \wedge (a, b) \notin R\}$. □

Зад. 3 Напишете всички елементи на релацията $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, дефинирана така: $R = \{(a, b, c) \,|\, 0 < a < b < c < 5\}$.

Зад. 4 За всяка от следните дефиниции на релацията $R \subseteq A \times B$, намерете R^{-1} и $\overline{R}$. Символът "$\mathbb{R}$" означава множеството от реалните числа.

1. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $R = \{(a, b) \,|\, a < b\}$.

2. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $R = \{(a, b) \,|\, a \text{ дели } b\}$.

3. A е множеството от държавите в Европа. B също е множеството от държавите в Европа. $R = \{(a, b) \,|\, a \text{ и } b \text{ имат обща граница}\}$.

Зад. 5 Нека M е матрицата на някаква релация $R \subseteq A \times A$. Нека A е крайно множество с n елемента. Нека M има точно k единици. Нека M' и M'' са съответно матриците на R^{-1} и $\overline{R}$. Колко единици има в M'? Колко единици има в M''?

Зад. 6 Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Нека $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq A \times B$ са такива, че $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ и $R_2 = \{(1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2)(2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$. Намерете

а) $R_1 \cup R_2$ **б)** $R_1 \cap R_2$ **в)** $R_1 \setminus R_2$ **г)** $R_2 \setminus R_1$ **д)** $(R_1 \setminus R_2) \times (A \times B)$

Зад. 7 Нека A е множеството от студентите в някакъв университет. Нека B е множеството от книгите в библиотеката на университета. Нека $R \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq A \times B$ са съответно релациите:

$$R_1 = \{(a, b) \,|\, \text{студент } a \text{ трябва да прочете книга } b\}$$
$$R_2 = \{(a, b) \,|\, \text{студент } a \text{ е чел книга } b\text{, която е трябвало да прочете}\}$$

Опишете следните релации

а) $R_1 \cup R_2$ **б)** $R_1 \cap R_2$ **в)** $R_1 \oplus R_2$ **г)** $R_1 \setminus R_2$ **д)** $R_2 \setminus R_1$

Зад. 8 Нека $R_> = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a > b\}$. Нека релациите $R_\geq$, $R_<$, $R_\leq$, $R_=$, $R_\neq$ са аналогичните релации с очевидния смисъл на индексите. Опишете колкото е възможно по-просто и естествено следните релации:

а) $R_> \cup R_<$ **б)** $R_> \cup R_=$ **в)** $R_\geq \cap R_\leq$ **г)** $R_> \setminus R_\geq$ **д)** $R_\geq \setminus R_>$
е) $R_< \cup R_=$ **ж)** $R_> \oplus R_<$ **з)** $R_> \oplus R_<$ **и)** $R_\geq \cup R_\leq$ **й)** $R_< \cup R_\neq$
к) $R_< \cap R_\neq$ **л)** $R_\leq \cap R_\neq$ **м)** $R_\leq \setminus R_\neq$ **н)** $R_\neq \setminus R_\leq$ **о)** $R_\geq \oplus R_\neq$ **п)** $R_< \oplus R_=$

Зад. 9 Напишете в явен вид (примерно, нарисувайки графа на релацията) всички релации над триелементно множество, които са антирефлексивни, антисиметрични и не са транзитивни.

Зад. 10(*) Колко релации $R \subseteq A \times A$, където A е крайно множество с n елемента, са:

1. рефлексивни?
2. антирефлексивни?
3. симетрични?
4. антисиметрични?
5. силно антисиметрични?
6. симетрични и антисиметрични?

7. симетрични и силно антисиметрични?
8. симетрични и рефлексивни?
9. антисиметрични и нито рефлексивни, нито антирефлексивни?
10. антисиметрични и силно антисиметрични?

Зад. 11 Колко транзитивни релации има над n елементно множество, ако

1. $n = 1$
2. $n = 2$
3. (*) $n = 3$

Зад. 12 Нека A и B са крайни множества. Нека A има точно три елемента. Колко елемента има B, ако е известно, че има точно 4096 релации от вида $R \subseteq A \times B$?
Упътване: $4096 = 2^{12}$.

Зад. 13 Следната теорема е **невярна**. Следователно, в "доказателството" ѝ има грешка/грешки. Открийте каква е грешката/какви са грешките в това "доказателство".

Теорема 1 (**погрешна** теорема)**.** *Нека R е произволна релация над множество A. Нека R е симетрична и транзитивна. Тогава R е рефлексивна.*

Доказателство
Разглеждаме произволен $a \in A$. Нека b е произволен елемент от A, такъв че aRb. Тъй като R е симетрична, заключаваме, че bRa. Тъй като R е транзитивна и вече имаме $aRb \wedge bRa$, заключаваме, че aRa. Доказахме за произволен елемент, че той е в релация със себе си. $\square$

Зад. 14 Докажете за произволна релация R, че R е симетрична тогава и само тогава, когато $R = R^{-1}$.

Зад. 15 Докажете за произволна релация $R \subseteq A \times A$, че R е антисиметрична тогава и само тогава, когато $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Зад. 16 Нека S е множеството от всички релации над I_5. Нека $R \subseteq S \times S$ е релация, дефинирана така:

$$S = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имат един и същи брой елементи}\}$$

Докажете, че R е релация на еквивалентност. Колко класа на еквивалентост има R?

Зад. 17 Нека за всяко естествено число n, J_n е множеството $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Нека $A = \{2^n \mid n \in J_5\}$. Нека $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$ е релация, дефинирана така:

$$R = \left\{ \big((a, b), (c, d)\big) \in (A \times A) \times (A \times A) \mid ac = bd \lor ad = bc \right\}$$

Колко елемента има R? Напишете в явен вид R чрез матрицата ѝ. Докажете, че R е релация на еквивалентност. Кои са класовете на еквивалентност на R?

Зад. 18 Нека $A = \{a, b, c, d\}$. Нека $R \subseteq A \times A$ е релацията

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

Определете рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на R.

Зад. 18 Нека $A = \{a, b, c, d\}$. Нека $R \subseteq A \times A$ и $R = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$. Определете минималната по брой елементи релация $S \subseteq A \times A$, такава че $R \cup S$ е релация на еквивалентност.

Решение:
$S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, c)\}$.

□

Зад. 19 Нека $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Нека $S \subseteq A \times A$ и $S = \{(2, 2), (2, 3), (1, 4)\}$. Определете минималната по мощност релация $T \subseteq A \times A$, такава че $S \cup T$ е релация на еквивалентност.

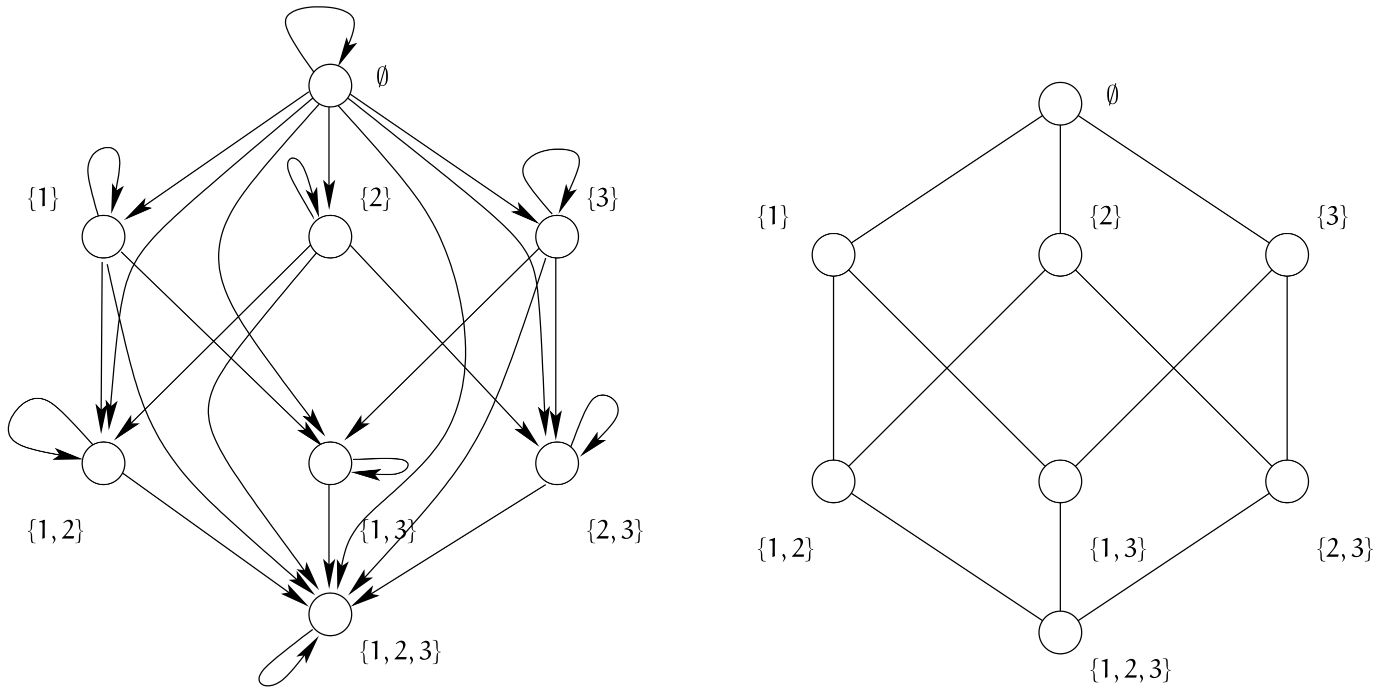
Зад. 20 Нека R и S са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако R и S са транзитивни, то $R \triangle S$ е транзитивна.

Решение:
Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ и $S = \{(b, c), (c, d), (b, d)\}$. Очевидно и двете релации са транзитивни. Но $R \vartriangle S = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d)\}$ не е транзитивна – за да бъде транзитивна, трябва да съдържа (a, d). □

Зад. 21 Нека Q и T са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако T е антисиметрична, а Q е силно антисиметрична, то $\overline{T \setminus Q}$ е антисиметрична.

Решение:
Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека $T = \{(a, b)\}$ и $Q = \{(a, b)\}$. Очевидно и двете са антисиметрични. Очевидно Q е силно антисиметрична. Но $T \setminus Q = \emptyset$, следователно $\overline{T \setminus Q} = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$, която релация не е антисиметрична, тъй като съдържа (a, b) и (b, a). □

Определение 3. Релация на частична наредба $R \subseteq A \times A$ *е всяка релация, която е рефлексивна, антисиматрична и транзитивна. В контекста на частичните наредби, за всяко* $a \in A$ *и всяко* $b \in A$, a и b са сравними, *ако поне едно от* aRb *и* bRa *е изпълнено, и са* несравними *в противен случай.* Диаграма на Hasse *е начин за графично представяне на крайни частични наредби, при който се рисува част от графа на релацията:*



(а) Графът на релацията. (б) Диаграмата на Hasse.

Фигура 1: Графът и диаграмата на Hasse на релацията $R_{\subseteq A}$ с множество $A = \{1, 2, 3\}$.

- *не се рисуват примките – тъй като релацията е рефлексивна, те се подрабзират;*
- *не се рисуват ребра от вида* (a, c)*, ако вече* (a, b) *и* (b, c) *присъстват – тъй като релацията е транзитивна, те се подрабзират;*
- *елементите се рисуват на ясно обособени нива, примерно минималните отгоре, техните непосредствени съседи на следващото ниво и т. н. Поради това не се слагат посоки на ребрата, тъй като посоките се подразбират; ако започнем с минималните елементи отгоре и разполагаме другите надолу, посоките на ребрата са отгоре надолу.*

□

Като пример вижте релацията $R_{\subseteq A}$ с множество $A = \{1, 2, 3\}$, изобразена на Фигура 1 веднъж с граф и веднъж с диаграма на Hasse. Очевидно, диаграмата на Hasse е много по-прегледна, тъй като показва същността на релацията без нищо излишно.

Зад. 22 Нека $A = \{a, b, c, d\}$. Определете в явен вид всички релации на частична наредба над A, в които a и b са минимални, а c и d не са сравними.

Решение:
Въпросните релации са 16. За да се убедим в това, да разгледаме матриците им. Всяка от тези матрици има единици по главния диагонал, тъй като релациите са рефлексивни (Фигура 2).

Освен това, има нули в колоните на a и b (с изключение на клетките от главния диагонал), тъй като a и b са минимални (Фигура 3).

	a	b	c	d
a	1			
b		1		
c			1	
d				1

Фигура 2: Релациите са рефлексивни.

	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	
d	0	0		1

Фигура 3: a и b са минимални.

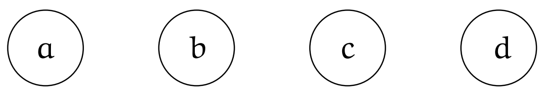
Освен това, има нули в клетките (c, d) и (d, c), тъй като c и d не са сравними (Фигура 4).

	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

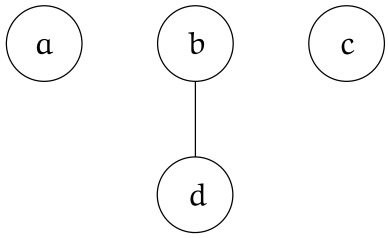
Фигура 4: c и d не са сравними.

Останалите 4 клетки могат да бъдат запълнени с нули и единици по $2^4 = 16$ различни начина, всеки от който съответства на една от търсените релации:

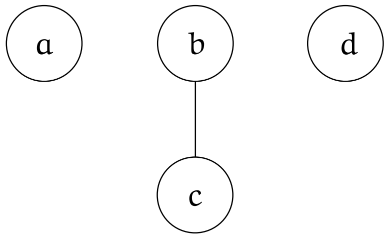
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



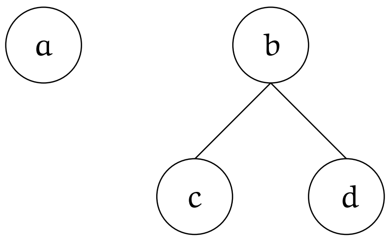
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



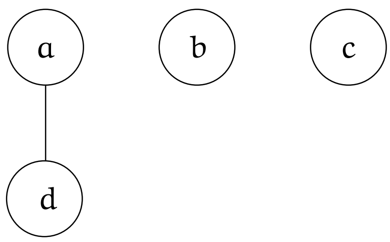
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



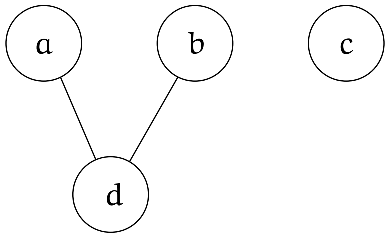
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



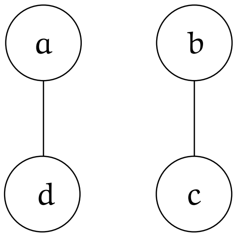
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



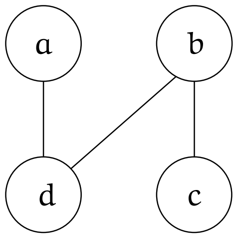
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



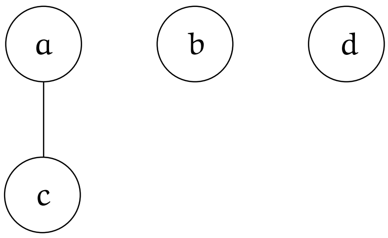
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



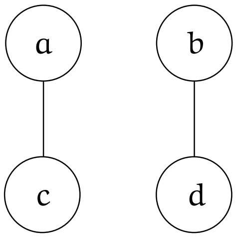
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



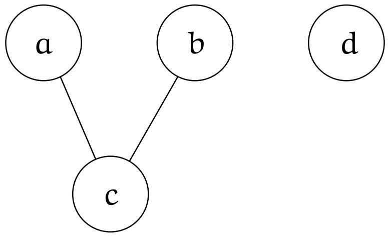
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



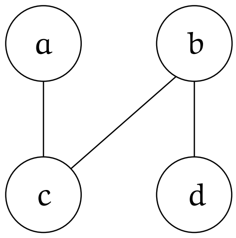
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



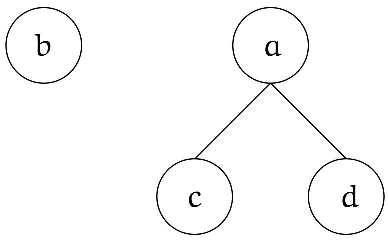
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



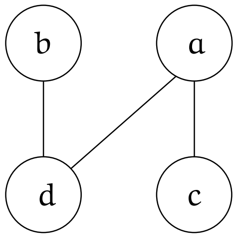
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



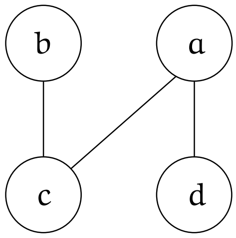
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



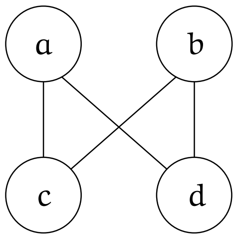
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



□

Определение 4, **Задача А**, **Задача Б** и **Задача В** са материал **извън** материала за курса и са предназначени за студенти със специален интерес към дискретната математика.

Определение 4 (композиция на релация със себе си)**.** *Нека* R *е релация над множество* A*. Релацията* $R \circ R$ *дефинираме така:*

$$R \circ R = \{(a, b) \mid \exists c \in A(aRc \land cRb)\}$$

Степените на релацията R *дефинираме така:*

$$\begin{aligned} R^1 &= R \\ \forall n \in \mathbb{N}^+ : \; R^{n+1} &= R^n \circ R \end{aligned}$$

Релациите $R^1 = R$, R^2, R^3 *и т. н. се наричат* степените на R.

Зад. А Нека $R \subseteq I_4 \times I_4$ е дефинирана така: $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Намерете R^n за $n \in \mathbb{N}^+$.

Решение: Лесно се съобразява, че

$$\begin{aligned}
R &= \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}\\
R^2 &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}\\
R^3 &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}\\
R^4 &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}
\end{aligned}$$

Тъй като $R^4 = R^3$, очевидно че $R^5 = R^4$, $R^6 = R^5$, и т. н. Следователно,

$$\forall n \in \mathbb{N}(n > 4 \to R^n = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\})$$

$\square$

Зад. Б Докажете, че за всяка релация $A \subseteq A \times A$, R е тразитивна тогава и само тогава, когато $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$.

Решение, част I: Нека R е транзитивна.

Ще докажем по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$. Базата е за $n = 1$: очевидно, $R^1 \subseteq R$. Да допуснем, че $R^n \subseteq R$. Ще докажем, че $R^{n+1} \subseteq R$. Да разгледаме произволен елемент $(a,b) \in R^{n+1}$. Съгласно Определение 4, $\exists x \in A\big((a,x) \in R^n \wedge (x,b) \in R\big)$. От индуктивната хипотеза знаем, че $R^n \subseteq R$. Следователно, $(a,x) \in R$. Щом $(a,x) \in R$ и $(x,b) \in R$, то $(a,b) \in R$, тъй като R е транзитивна. Доказахме, че щом даден елемент е в R^{n+1}, то той е и в R.

Решение, част II: Нека $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$.

Ще докажем, че R е транзитивна. Тъй като $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$, в частност $R^2 \subseteq R$. Да разгледаме произволни елементи от A, да ги наречем a, b и c. Нека $(a,b) \in R$ и $(b,c) \in R$. Съгласно Определение 4, изпълнено е $(a,c) \in R^2$. Но $R^2 \subseteq R$. Следователно, $(a,b) \in R$. $\square$

Зад. В Докажете, че за всяка релация $A \subseteq A \times A$, ако R е рефлексивна и тразитивна, то $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n = R)$.