2.5 Теорема за еквивалентната замяна. Теорема за варианта

В следващата теорема ще докажем добре познатото правило, че еквивалентни твърдения са взаимнозаменяеми.

Теорема 2.14. Нека формулата $\mathbf{A}'$ се получава от формулата $\mathbf{A}$, замествайки нула, едно, няколко или всички срещания на формулите $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ съответно с формулите $\mathbf{B}'_1, \ldots, \mathbf{B}'_n$. Тогава, ако $\mathbf{B}_i \leftrightarrow \mathbf{B}'_i$ е теорема за $1 \le i \le n$, то $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ също е теорема.

Доказателство. Достатъчно е да докажем теоремата в случая $n = 1$. Нека $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}'$ е теорема. Ще докажем с индукция по построението на формулата $\mathbf{A}$, че ако $\mathbf{A}'$ се получава от $\mathbf{A}$ чрез заместване на $\mathbf{B}$ с $\mathbf{B}'$, то $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ е теорема.

Нека първо разгледаме случая $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}$ (той се получава, когато не извършваме никакви замени, или пък $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}'$). Тогава $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ съгласно (ТТ).

Нека сега $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{A}'$. Тогава най-простата възможност е $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. В този случай $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{B}'$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ по условие. Остава да разгледаме случая $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}$ (продължавайки да предполагаме $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{A}'$).

Нека първо $\mathbf{A} \equiv \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$. Тогава тъй като всяка подформула на $\mathbf{A}$, различна от $\mathbf{A}$, е или подформула на $\mathbf{C}$, или подформула на $\mathbf{D}$, то $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{C}' \vee \mathbf{D}'$, където $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{D}'$ са получени от $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ чрез замени на $\mathbf{B}$ с $\mathbf{B}'$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'$ и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{D}'$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ съгласно (ТТ).

Нека сега $\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{C}$. Тогава тъй като всяка подформула на $\mathbf{A}$, различна от $\mathbf{A}$, е подформула на $\mathbf{C}$ то $\mathbf{A}' \equiv \neg\mathbf{C}'$, където $\mathbf{C}'$ е получена от $\mathbf{C}$ чрез замени на $\mathbf{B}$ с $\mathbf{B}'$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ съгласно (ТТ).

Нека накрая $\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{C}$. Тогава тъй като всяка подформула на $\mathbf{A}$, различна от $\mathbf{A}$, е подформула на $\mathbf{C}$ то $\mathbf{A}' \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{C}'$, където $\mathbf{C}'$ е получена от $\mathbf{C}$ чрез замени на $\mathbf{B}$ с $\mathbf{B}'$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'$, откъдето

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'}{\mathbf{C} \to \mathbf{C}'}\,(\text{ТТ})}{\exists\mathbf{x}\mathbf{C} \to \exists\mathbf{x}\mathbf{C}'}\,(\text{П}\exists\exists) \qquad \dfrac{\dfrac{\mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{C}'}{\mathbf{C}' \to \mathbf{C}}\,(\text{ТТ})}{\exists\mathbf{x}\mathbf{C}' \to \exists\mathbf{x}\mathbf{C}}\,(\text{П}\exists\exists)}{\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'}\,(\text{ТТ})$$

□

Да разгледаме формулата

$$\exists y(x = y.SS0).$$

Както видяхме, тази формула изказва свойството „x е четно число“. При това, ако заменим x се терм $\mathbf{a}$, който не съдържа променливата y, то получената формула

$$\exists y(\mathbf{a} = y.SS0)$$

изказва „**a** е четно число“. Ако обаче искаме да изкажем „y е четно число“, то това няма да може да бъде направено чрез замяна на x с y в първоначалната формула, защото формулата

$$\exists y(y = y.SS0)$$

изказва „съществува число, което е равно на два пъти себе си“. Да забележим обаче, че в изказването „x е четно число“ никъде не се споменава променливата y. Следователно формулата

$$\exists z(x = z.SS0)$$

отново изказва „x е четно число“ и в нея вече е допустимо да заменим x с y, като по този начин изкажем свойството „y е четно число“.. Последната формула се получава от първоначалната чрез „преименуване“ на свързаната променлива y. Да отбележим, че за да запазим смисъла на първоначалната формула y може да бъде преименувана, с коя да е променлива, различна от x, т.е. с коя да е променлива, неучастваща свободно в рамките на действието на квантора, която преименуваме.

В общата ситуация въвеждаме следното понятие.

Казваме, че формулата $\mathbf{A}'$ е вариант на формулата $\mathbf{A}$, ако $\mathbf{A}'$ се получава от $\mathbf{A}$ чрез последователни замени на подформули от вида $\exists \mathbf{x}\mathbf{B}$ с $\exists \mathbf{y}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]$, където $\mathbf{y}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$.

Да отбележим, че $\mathbf{A}$ е вариант на $\mathbf{A}$. Освен това, ако $\mathbf{A}$ не съдържа квантори, то единствения вариант на $\mathbf{A}$ е $\mathbf{A}$, а ако $\mathbf{A}$ съдържа квантор, то $\mathbf{A}$ има безброй много варианта. При това всяка формула $\mathbf{A}$ има вариант $\mathbf{A}'$, в който нито една променлива не участва едновременно свободно и свързано. Следващата теорема формализира интуицията, че дадена формула и кой да е неин вариант изказват едно и също.

Теорема 2.15. Нека $\mathcal{F}$ е формална система, $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$ и $\mathbf{A}'$ е вариант на $\mathbf{A}$. Тогава

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$$

Доказателство. Предвид дефиницията на вариант и теоремата за еквивалентната замяна достатъчно е да докажем, че

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{x}\mathbf{B} \leftrightarrow \exists \mathbf{y}\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}],$$

където $\mathbf{y}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$. За целта нека $\mathbf{y}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$ и нека означим $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}]$ с $\mathbf{B}'$. Да забележим, че свободните участия на $\mathbf{y}$ в $\mathbf{B}'$ са точно свободните участия на $\mathbf{x}$ в $\mathbf{B}$, като това са единствените различия между двете формули. Следователно $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}'_{\mathbf{y}}[\mathbf{x}]$. Тогава

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{B} \to \exists \mathbf{y}\mathbf{B}'}\,(\text{АСуб})}{\exists \mathbf{x}\mathbf{B} \to \exists \mathbf{y}\mathbf{B}'}\,(\text{П}\exists) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{B}' \to \exists \mathbf{x}\mathbf{B}}\,(\text{АСуб})}{\exists \mathbf{y}\mathbf{B}' \to \exists \mathbf{x}\mathbf{B}}\,(\text{П}\exists)}{\exists \mathbf{x}\mathbf{B} \leftrightarrow \exists \mathbf{y}\mathbf{B}'}\,(\text{ТТ})$$

$\square$

2.6 Теореми за равенството

Нека първо да отбележим, че всяка формална система съдържа логическата аксиома

$$x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2.$$

Тази аксиома е конкретния вид на схемата $x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to \mathbf{p}x_1 \dots x_n \to \mathbf{p}y_1 \dots y_n$, когато $\mathbf{p}$ е предикатния символ $=$.

Ще докажем, че равенството е рефликсивна, симетрична и транзитивна релация.

Твърдение 2.16 (Теорема за тъждеството)**.** $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{}{x = x}\ (\text{Акс})}{\mathbf{a} = \mathbf{a}}\ (\text{ПЗ})$$

□

Твърдение 2.17 (Теорема за симетричността)**.** $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{a}$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2}}{\mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{a} = \mathbf{a} \to \mathbf{a} = \mathbf{a} \to \mathbf{b} = \mathbf{a}}\ (\text{ПЗ}) \qquad \dfrac{}{\mathbf{a} = \mathbf{a}}}{\mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{a}}\ (\text{ТТ})$$

□

Твърдение 2.18 (Теорема за транзитивността)**.** $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \mathbf{a} = \mathbf{c}$

Доказателство.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2}}{\mathbf{a} = \mathbf{a} \to \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{a} = \mathbf{c}}\ (\text{ПЗ}) \qquad \dfrac{}{\mathbf{a} = \mathbf{a}}}{\mathbf{a} = \mathbf{b} \to \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \mathbf{a} = \mathbf{c}}\ (\text{ТТ})$$

□

Следващата теорема е подобна на теоремата за еквивалентната замяна. Тя казва, че ако два терма са доказуемо равни, то те са взаимно заменяеми.

Теорема 2.19 (Теорема за равенството)**.** Нека $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$ са термове, такива че $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$ за $1 \leq i \leq n$. Тогава:

- Ако търмът $\mathbf{b}'$ се получава от терма $\mathbf{b}$, замествайки нула, едно, няколко или всички срещания на $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ съответно с $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n$, то

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b} = \mathbf{b}'.$$

- Ако формулата $\mathbf{A}'$ се получава от формулата $\mathbf{A}$, замествайки нула, едно, няколко или всички срещания на $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ съответно с $\mathbf{a}'_1,\ldots,\mathbf{a}'_n$, то
$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$$

Доказателство. Достатъчно е да докажем теоремата при $n = 1$. За целта, нека $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{a}'$, и $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{A}'$ се получават съответно от $\mathbf{b}$ и $\mathbf{A}$ замествайки нула, едно, няколко или всички срещания на $\mathbf{a}$ с $\mathbf{a}'$. Нека първо да забележим, че ако не се извършват никакви замени или $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}'$, то $\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}'$ и $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$, и в този случай
$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b} = \mathbf{b}' \text{ и } \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$$
следват съответно от теоремата за тъждеството и теоремата за тавтологиите. За това, нека $\mathbf{a} \not\equiv \mathbf{a}'$, $\mathbf{b} \not\equiv \mathbf{b}'$ и $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{A}'$. Ще докажем, твърденията на теоремата с индукция по построението на $\mathbf{b}$ и $\mathbf{A}$.

Ако $\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}$, то тогава $\mathbf{b}' \equiv \mathbf{a}'$ и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b} = \mathbf{b}'$ ни е дадено по условие. В противен случай, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{f}\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n$ за някой n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ и термове $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$. Тогава всяко срещане на $\mathbf{a}$ в $\mathbf{b}$ е в рамките на някой от термовете $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ и следователно $\mathbf{b}' \equiv \mathbf{f}\mathbf{b}'_1 \ldots \mathbf{b}'_n$, където за $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{b}'_i$ се получава от $\mathbf{b}_i$ чрез заместване на $\mathbf{a}$ с $\mathbf{a}'$. Тогава съгласно индукционното предположение за $1 \leq i \leq n$ имаме
$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b}_i = \mathbf{b}'_i.$$
Оттук
$$\dfrac{\dfrac{\overline{x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to \mathbf{f}x_1 \ldots x_n = \mathbf{f}y_1 \ldots y_n}}{\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'_1 \to \cdots \to \mathbf{b}_n = \mathbf{b}'_n \to \mathbf{b} = \mathbf{b}'}\,(\text{ПЗ}) \qquad \overline{\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'_1} \quad \ldots \quad \overline{\mathbf{b}_n = \mathbf{b}'_n}}{\mathbf{b} = \mathbf{b}'}\,(\text{ТТ})$$
т.е.
$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b} = \mathbf{b}'.$$

За $\mathbf{A}$ ще разгледаме четири случая. Нека първо $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p}\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n$ за някой n-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ и термове $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$. Тогава всяко срещане на $\mathbf{a}$ в $\mathbf{A}$ е в рамките на някой от термовете $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ и следователно $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{p}\mathbf{b}'_1 \ldots \mathbf{b}'_n$, където за $1 \leq i \leq n$, $\mathbf{b}'_i$ се получава от $\mathbf{b}_i$ чрез заместване на $\mathbf{a}$ с $\mathbf{a}'$. Съгласно вече доказаното за термове и теоремата за симетричността, за $1 \leq i \leq$ имаме
$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b}_i = \mathbf{b}'_i \text{ и } \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{b}'_i = \mathbf{b}_i$$
Оттук
$$\dfrac{\dfrac{\overline{x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to \mathbf{p}x_1 \ldots x_n = \mathbf{p}y_1 \ldots y_n}}{\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'_1 \to \cdots \to \mathbf{b}_n = \mathbf{b}'_n \to \mathbf{A} \to \mathbf{A}'}\,(\text{ПЗ}) \qquad \overline{\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'_1} \quad \ldots \quad \overline{\mathbf{b}_n = \mathbf{b}'_n}}{\mathbf{A} \to \mathbf{A}'}\,(\text{ТТ})$$
и
$$\dfrac{\dfrac{\overline{x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to \mathbf{p}x_1 \ldots x_n = \mathbf{p}y_1 \ldots y_n}}{\mathbf{b}'_1 = \mathbf{b}_1 \to \cdots \to \mathbf{b}'_n = \mathbf{b}_n \to \mathbf{A}' \to \mathbf{A}}\,(\text{ПЗ}) \qquad \overline{\mathbf{b}'_1 = \mathbf{b}_1} \quad \ldots \quad \overline{\mathbf{b}'_n = \mathbf{b}_n}}{\mathbf{A}' \to \mathbf{A}}\,(\text{ТТ})$$
откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ съгласно теоремата за тавтологиите.

Нека сега $\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{B}$. Тогава $\mathbf{A}' \equiv \neg\mathbf{B}'$, където $\mathbf{B}'$ се получава от $\mathbf{B}$ чрез замени на $\mathbf{a}$ с $\mathbf{a}'$. Тогава съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}'$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}'$ съгласно теоремата за еквивалентната замяна.

Случаите $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ и $\mathbf{A} \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{B}$ се доказват аналогично.

□

2.7 Теорема за дедукцията. Теорема за редукцията

Нека $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ са формални системи. Ще казваме, че езикът $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$ на $\mathcal{F}$ *разширява* езика на $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ на $\mathcal{F}$ и ще пишем $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}')$, ако всеки нелогически символ на $\mathcal{F}$ е нелогически символ на $\mathcal{F}'$. От дефиницията на термове и формули следва, че ако $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}')$, то всеки терм и всяка формула на $\mathcal{F}$ са съответно терм и формула на $\mathcal{F}'$. В частност двата езика съвпадат тогава и само тогава, когато е изпълнено едвовременно $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}')$ и $\mathcal{L}(\mathcal{F}') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F})$.

Тъй като логическите аксиоми на една формална система се определят еднозначно от формулите на системата, то ако $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}')$, то всяка логическа аксиома на $\mathcal{F}$ е логическа аксиома и на $\mathcal{F}'$. При това, ако $\mathcal{F}'$ съдържа поне един нелогически символ, непринадлежащ на $\mathcal{F}$, то в $\mathcal{F}'$ има безброй много логически аксиоми, които не са логически аксиоми на $\mathcal{F}$.[1]

Ще казваме, че $\mathcal{F}'$ е разширение на $\mathcal{F}$ и ще пишем $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, ако $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}')$ и всяка нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$ е теорема на $\mathcal{F}'$.

Твърдение 2.20. Нека $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$.

Доказателство. Ще проведем индукция по извода на теоремите в $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}$ е логическа аксиома на $\mathcal{F}$, то $\mathbf{A}$ е логическа аксиома и на $\mathcal{F}'$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$. Ако $\mathbf{A}$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$, то $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$ по условие. Накрая, ако $\mathbf{A}$ се получава от $\mathbf{B}$ (и евентуално $\mathbf{C}$) чрез някое от правилата (ПР), (ПС), (ПА), (ПО) и (П∃), и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}$ (съответно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{C}$), то съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{B}$ (съответно $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{C}$) и следователно $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$.

□

Нека $\mathcal{F}$ е формална система от първи ред и Γ е съвкупност (множество) от формули на $\mathcal{F}$. С $\mathcal{F}[\Gamma]$ ще означаваме формалната система, която се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки формулите от Γ като нелогически аксиоми. Ясно е, че

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}[\Gamma].$$

Нещо повече, всяка формалана система $\mathcal{F}$ има вида $\mathcal{F}_0[\Gamma]$, където $\mathcal{F}_0$ е формалната система с език, съвпадащ с този на $\mathcal{F}$, а Γ е съвкупността на нелогическите аксиоми на $\mathcal{F}$.

[1] Ако $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}'$, която не е формула на $\mathcal{F}$, то $\neg(\underbrace{\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \vee \cdots \vee \mathbf{A}}_{n}) \vee (\underbrace{\mathbf{A} \vee \mathbf{A} \vee \cdots \vee \mathbf{A}}_{n})$ за $n > 0$ са различни аксиоми на $\mathcal{F}'$, които не са формули (а значи и аксиоми) на $\mathcal{F}$.

Ако Γ се състои от формулите $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, то вместо $\mathcal{F}[\Gamma]$ ще пишем $\mathcal{F}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]$.

Теорема 2.21 (За дедукцията)**.** Нека $\mathcal{F}$ е формална система и $\mathbf{A}$ е *затворена* формула на $\mathcal{F}$. Тогава за всяка формула $\mathbf{B}$ на $\mathcal{F}$

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{B} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}.$$

Доказателство. Нека първа $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, защото $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}[\mathbf{A}]$. Но $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{A}$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{B}$. За да докажем обратната посока ще проведем индукция по извода на теоремите в $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$. Нека $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{B}$. Възможни са следните случаи:

(i) $\mathbf{B}$ е аксиома на $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$, различна от $\mathbf{A}$. Тогава $\mathbf{B}$ е аксиома на $\mathcal{F}$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ съгласно (TT).

(ii) $\mathbf{B}$ е аксиомата $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, защото $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ (т.е. $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$) е тавтология.

(iii) $\mathbf{B}$ е тавтологично следствиена $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ и $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{B}_i$ за $1 \leq i \leq n$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{B}_i$ за $1 \leq i \leq n$. При това $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A} \to \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{A} \to \mathbf{B}_n$ и следователно $\vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

(iv) $\mathbf{B} \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, където $\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}]} \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{D}$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \mathbf{C} \to \mathbf{D}$. Оттук $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{C} \to \mathbf{A} \to \mathbf{D}$ съгласно (TT). Тъй като $\mathbf{A}$ е затворена, то $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{A} \to \mathbf{D}$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{C} \to \mathbf{A} \to \mathbf{D}$ съгласно (П$\exists$). Оттук $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \to \exists \mathbf{x} \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ съгласно (TT).

$\square$

Прилагайки многоратно теоремата за дедукцията получаваме следното следствие.

Следствие 2.22. Нека $\mathcal{F}$ е формална система и $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ са *затворени* формула на $\mathcal{F}$. Тогава за всяка формула $\mathbf{B}$ на $\mathcal{F}$

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]} \mathbf{B} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}.$$

В доказателството на теоремата за дедукцията съществено използвахме това, че формулата, която прибавяме като нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$ е затворена. В общия случай е в сила следната теорема.

Теорема 2.23 (За редукцията)**.** Нека $\mathcal{F}$ е формална система и Γ е множество от формули на $\mathcal{F}$. Тогава за всяка формула $\mathbf{B}$ на $\mathcal{F}$ е в сила $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \vdash \mathbf{B}$ тогава и само тогава, когато съществува $k \geq 0$ и универсални затваряния $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ на формули от Γ, такива че

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}.$$

Доказателство. Нека първо $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$, където $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ са универсални затваряния на формулите $\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n$ от Γ. Тогава, тъй като $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}[\Gamma]$, то $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$. При това $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}'_i$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}_i$ (всяка формула е равнодоказуема с кое да е свое универсално затваряне) и следователно $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{B}$ съгласно (ТТ).

Обратно, нека $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{B}$. Нека $\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n$ са формулите от Γ, които се използват като аксиоми в дадено доказателство на $\mathbf{B}$ в $\mathcal{F}[\Gamma]$. Тогава

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n]} \mathbf{B}.$$

Нека $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ са универсални затваряния на $\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n$. Тогава, тъй като всяка формула е равнодоказуема с кое да е свое универсално затваряне, в сила е

$$\mathcal{F}[\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n] \subseteq \mathcal{F}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]$$

и следователно

$$\vdash_{\mathcal{F}[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]} \mathbf{B}.$$

Оттук и теормета за дедукцията

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_1 \to \cdots \to \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}.$$

□

2.8 Теорема за константите

Ще казваме, че разширението $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ е *консервативно*, ако за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$ от $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$ следва $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$. С други думи, разширението $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ е консервативно, ако $\mathcal{F}'$ не може да докаже нищо ново по отношение на $\mathcal{F}$.

Разбира се, не можем да твърдим, че $\mathcal{F}'$ доказва същото като $\mathcal{F}$, защото $\mathcal{F}'$ може да съдържа символи, различни от тези на $\mathcal{F}$, като в този случай $\mathcal{F}'$ със сигурност ще доказва теореми, които от гледна точка на $\mathcal{F}$ не са дори формули.

Лема 2.24. Нека $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$ чрез добавяне на нови константи (нуламестни функционални символи).[2] Нека $\mathbf{A}'$ е формула на $\mathcal{F}'$, чиито нови константи са измежду $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$. Нека $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ са нови променливи (неучастващи в $\mathbf{A}'$ и различни помежду си) и нека $\mathbf{A}$ се получава от $\mathbf{A}'$ чрез заместване на срещанията на $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ съответно с $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$. Тогава

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}' \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$$

Доказателство. Нека първо $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$, защото $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Тъй като $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}_{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n]$, то $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}'$ съгласно (ПЗ).

Нека сега $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}'$ и нека $\mathbf{A}'_0, \ldots, \mathbf{A}'_k$ е доказателство на $\mathbf{A}'$ в $\mathcal{F}'$. Нека $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n, \mathbf{c}_{n+1}, \ldots, \mathbf{c}_m$ са всички нови константи, участващи във формулите $\mathbf{A}'_0, \ldots, \mathbf{A}'_k$ и нека $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ са нови променливи (различни дори от $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$). Ако $\mathbf{B}'$ е формула на $\mathcal{F}'$, с $\mathbf{B}^*$ ще означаваме формулата, която се получава заместайки срещанията на $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$ с $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$. С индукция ще докажем, че $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*_i$ за $0 \leq i \leq k$. Възможни са следните случаи:

(i) $\mathbf{A}'_i$ е аксиома на $\mathcal{F}'$. Лесно се вижда, че ако $\mathbf{A}'_i$ е съждителна аксиома, аксиома за субституцията или аксиома за равентството, различна от

$\mathbf{c}_s = \mathbf{c}_s$ за $1 \leq s \leq m$, то $\mathbf{A}_i^*$ е съответно съждителна аксиома, аксиома за субституцията или аксиома за равентството на $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}_i'$ е аксиомата $\mathbf{c}_s = \mathbf{c}_s$ за някое $1 \leq s \leq m$, то $\mathbf{A}_i^*$ е $\mathbf{z}_s = \mathbf{z}_s$, което е теорема на $\mathcal{F}$ съгласно теоремата за тъждеството. Накрая, ако $\mathbf{A}_i'$ е нелогическа аксиома, то $\mathbf{A}_i^*$ съвпада с $\mathbf{A}_i'$ и е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$.

(ii) $\mathbf{A}_i'$ е тавтологично следствие на формулите $\mathbf{A}_{j_1}', \ldots, \mathbf{A}_{j_l}'$ за някои $j_1 < j_2 < \cdots < j_l < i$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{j_t}^*$ за $1 \leq t \leq l$. При това $\mathbf{A}_i^*$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_{j_1}^*, \ldots, \mathbf{A}_{j_l}^*$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$ съгласно (TT).

(iii) $\mathbf{A}_i' \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{B}' \to \mathbf{C}'$, като $\mathbf{B}' \to \mathbf{C}' \equiv \mathbf{A}_j'$ за някое $j < i$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{C}'$. Тогава $\mathbf{A}_i^* \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{B}^* \to \mathbf{C}^*$, $\mathbf{A}_j^* \equiv \mathbf{B}^* \to \mathbf{C}^*$, като при това тъй като $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{C}^*$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}^* \to \mathbf{C}^*$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{x} \mathbf{B}^* \to \mathbf{C}^*$ съгласно (П$\exists$).

Променливите $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ са нови и значи различни от $\mathbf{x}$.

Следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*$. Но $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^*_{\mathbf{z}_1 \ldots \mathbf{z}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n]$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$, съгласно правилото за замяната.

□

Теорема 2.25 (Теорема за константите)**.** Нека $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$ чрез добавяне на нови константи (нуламестни функционални символи). Тогава $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$. При това, ако $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ са различни променливи, а $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ са различни нови константи, то

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n].$$

за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$.

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$. Нека $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ са нови променливи. Тогава съгласно лемата

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n] \iff \vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n].$$

Тъй като $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ са нови променливи, то съгласно правилото за замяната

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n],$$

откъдето

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n].$$

Тъй като променливите $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ са произволни, когато ги изберем така, че те да не участват в $\mathbf{A}$, получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$$

и следователно разширението е консервативно.

□

2.9 Разширения с помощта на дефиниции

Нека $\mathcal{F}$ е формална система от първи ред. Нека $\mathbf{D}$ е формула на $\mathcal{F}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Нека $\mathbf{p}$ е нов n-местен функционален символ. Ще казваме, че $\mathcal{F}'$ е разширение на $\mathcal{F}$ чрез дефиниране на