ТЕМА 6: КОМБИНАТОРИКА(ПРОДЪЛЖЕНИЕ)

Задача 1: Да се определи коефициента пред:

a) $x^{10}y^5$ в $(3x+2y)^{15}$

b) x^{32} в $(x+\frac{1}{x})^{1024}$

<u>*Решение:*</u> $(x+\frac{1}{x})^{1024} = \sum_{k=0}^{1024}\binom{1024}{k}x^k x^{-(1024-k)}$.

Всяко събираемо има вида: $\binom{1024}{k}x^{2k-1024}$

Търсим такова k, за което $2k-1024=32 \;\Rightarrow k=528$

и така търсеният коефициент е: $\binom{1024}{528}$

Задача 2: Дадена е окръжност R, на която са отбелязани последователно 12 точки - $a_1, a_2, ..., a_{12}$. Намерете броя на:

a) различните хорди с краища две от указаните точки;

b) различните триъгълници с върхове три от точките;

c) изпъкналите четириъгълници с върхове измежду дадените точки;

d) триъгълниците с върхове в дадените точки, чиито страни не се пресичат с правата, определена от точките a_2 и a_8;

e) триъгълниците с върхове измежду указаните точки, чиито страни се пресичат с правата през точките a_1 и a_5.

<u>*Решение:*</u> За да е изпълнено това условие трябва триъгълникът да има върхове от двете страни на правата, определена от точките a_1 и a_5. Това означава, че върховете на триъгълника трябва да се избират от множествата $A=\{a_2,a_3,a_4\}$ и $B=\{a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12}\}$.

Първи случай: два от върховете на триъгълника са избрани от множеството A, третият от множеството B. Този избор може да стане по $C_3^2.C_7^1 = \binom{3}{2}\binom{7}{1} = 3.7 = 21$ начина.

Втори случай: един връх се избира от множеството A, два от множеството B. Това може да стане по $C_3^1.C_7^2 = \binom{3}{1}\binom{7}{2} = 3.21 = 63$ начина.

Така общият брой на триъгълниците е

$\binom{3}{2}\binom{7}{1} + \binom{3}{1}\binom{7}{2} = 21 + 63 = 84$

Задача 3: Хвърлят се 7 различни зарчета. В колко от случаите е изпълнено следното:

a) всички зарчета показват различно;

b) има две шестици, останалите зарчета показват различно;

c) две зарчета показват едно число, останалите са различни.

Задача 4: По колко начина могат n човека да се хванат на хоро?

Задача 5: По колко начина могат да се нанижат n скъпоценни камъка на огърлица?

Задача 6: По колко начина могат да седнат n човека около кръгла маса, като за различни се считат две наредби, ако поне един човек има различен съсед.

Задача 7: Колко идентификатора с дължина n могат да се съставт в езика Ada. (Идентификатор в Ada започва с буква, продължава с буква, цифра или знак за подчертаване. Знаците за подчертаване не могат да са съседни или в края на идентификатора. Малките и главните букви са неразличими).

Задача 8: Дадено е множеството $|A| = n$. Да се определи броят на релациите $R \subseteq A \times A$, които са:

a) без ограничения;

b) рефлексивни;

c) симетрични/ силно антисиметрични;

d) рефлексивни и симетрични;

e) антисиметрични;

f) антирефлексивни и антисиметрични.

Задача 9: Двама души трябва да си разделят 4 ябълки, 3 круши и 5 банана. По колко начина може да стане това?

Задача 10: Нека M е естествено число със следното представяне: $M = p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}$, като $p_1, p_2, ..., p_k$ са простите множители на M. Колко са различните делители на числото M?

Задача 11: Докажете, че между произволно избрани $p+1$ естествени числа, винаги може да се намерят две, разликата на които се дели на p.

Доказателство: Съгласно принципа на Дирихле, всяко множество от $p+1$ естествени числа съдържа две числа с равни остатъци при деление на p. А от това следва, че тяхната разлика се дели на p.

Задача 12: Докажете, че между произволно избрани 12 различни естествени двуцифрени числа има поне две, чиято разлика е двуцифрено число, което се записва с две еднакви цифри.

<u>*Доказателство:*</u> Двуцифрените естествени числа са числата в интервала $[10, 99]$. Съгласно принципа на Дирихле, в множеството на избраните 12 числа има две, които са с равни остатъци при деление на 11.

$a_i, a_j \in [10, 99],\ a_i = 11x + k;\ a_j = 11y + k;\ k \in J_{11} \Rightarrow$

$a_i - a_j = 11(x - y) \Rightarrow 11|a_i - a_j$

Но числата, кратни на 11 в интервала $[10, 99]$, се записват с две еднакви цифри - 11, 22,..., 99, от където следва твърдението на задачата.

Задача 13: Колко различни естествени числа трябва да напишем, за да сме сигурни, че измежду тях има 7 числа, коита са сравними по модул 9.

<u>*Решение:*</u> Да приложим обобщения принцип на Дирихле. Тъй като $6.9 + 1 = 55$, то можем да заключим, че ако изберем 55 различни естествени числа, то измежду тях ще има 7, които имат един и същ остатък при деление на 9, т.е. те са сравними по модул 9.

Задача 14: . От множеството I_{100} по произволен начин са избрани 51 числа. Да се докаже, че поне едно от избраните числа се дели на друго от тях.

<u>*Решение:*</u> Всяко естествено число, различно от нула, може да се представи във вида $a = 2^k(2m + 1); k, m \in \mathbb{N}$. Тъй като $a \in I_{100}$, то $m \in J_{50}$.

Съгласно принципа на Дирихле, ще има две от избраните числа с равни стойности на m, т.е. $\exists p = 2^{k_1}(2m + 1);\ \exists q = 2^{k_2}(2m + 1)$.

Ако $k_1 < k_2$ то $p|q$, иначе $q|p$.

Задача 15: Нека $M \subset I_{100}; |M| = 10$. Да се докаже, че съществуват две непресичащи се подмножества на M с еднакви суми на елементите.

<u>*Решение:*</u> Непразните подмножества на M са $2^{10} - 1 = 1023$ на брой. Възможните суми на елементите на всяко от тези подмножество са в интервала от 1 до 955.

Съгласно принципа на Дирихле, съществуват две подмножества с равни суми на елементите. Ако множествата имат общи елементи, то множествата, получени след отстраняване на общите елементи също ще имат равни суми. При това е сигурно, че никое от тези множества няма да е празно, иначе ще се получи противоречие с факта, че сумите са равни.

Доказване на тъждества с комбинаторни средства

Задача 16: Да се докаже с комбинаторни разсъждения:

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$

Упътване: Да се установи биекция между k–елементните и $(n-k)$–елементните подмножества на едно n–елементно множество.

b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Упътване: Множеството от k-елементните подмножества на едно n-елементно множество да се разбие на две множества съобразно това¸ дали подмножеството съдържа фиксиран елемент от базовото множество или не.

c) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{n-k-1}^0$

Упътване: Множеството от k-елементните подмножества на едно n-елементно множество $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ да се разбие на $k+1$ множества, като i–тото множество обединява всички подмножества на базовото, които съдържат елементите $a_1, a_2, ...a_i$ и не съдържат елемента a_{i+1} от базовото множество.

d) $C_{n+k}^k = \sum\limits_{i=0}^{k} C_{n+i-1}^i$

Упътване: Да се вземе пред вид равенството $C_{n+k}^k = S_{n+1}^k$, след което множеството от всички комбинации с повторение от $n+1$ елемента клас k да се разбие на $k+1$ множества съобразно броя на срещанията $(0, 1, ..., k)$ на фиксиран елемент от базовото множество в комбинацията.

e) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

Упътване: Разгледайте разбиване на множеството от всички булеви вектори с дължина n на подмножества, обединяващи векторите с фиксиран брой $(0, 1, ..., n)$ единици.

Задача 17: Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Задача 18: Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

Задача 19: Докажете с комбинаторни разсъждения:

$$\forall n \in \mathbb{N}\left(n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \to \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}\right)$$

Решение: Разглеждаме множество $A, |A| = 2k+1, k \in \mathbb{N}$.

Да означим с $A' = \{X | X \subset A, |X| = k\}$ и с $A'' = \{Y | Y \subset A, |Y| = k+1\}$.

На всеки елемент $X \in A'$ еднозначно съответства елемент $Y \in A'', Y = A \setminus X$, от което следва, че $|A'| = |A''|$.

Тъй като $|A'| = \binom{n}{k}, |A''| = \binom{n}{k+1} \ \Rightarrow \ \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$

Задача 20: Докажете с комбинаторни разсъждения:
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

Решение: Студентска група от n момчета и m момичета избира делегация от r човека да я представляват на студентски форум. Това може да стане по $\binom{n+m}{r}$ начина. Сега да разбием възможните избори съобразно броя на участващите в тях момичета - той може да е от 0 до r. Броят на делегациите с точно k момичета е $\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.

Като приложем принципа на сумата получаваме:
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

Задача 21: Докажете с комбинаторни разсъждения:
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Задача 22: Означаваме с $\left\{ n \atop k \right\}$ броя разбивания на n-елементно множество на k непразни подмножества. Докажете с комбинаторни разсъждения:
$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\} \ (1)$$

Решение: Да разгледаме произволно n-елементно множество $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и да означим с $\mathcal{P}(A, k)$ множеството от неговите разбивания на k непразни подмножества. Изразът в лявата страна на горното равенство дава броя на разбиванията на n-елементно множество на k непразни подмножества - $|\mathcal{P}(A, k)|$. Да изберем произволен елемент на множеството A, например $\{a_1\}$, и да разгледаме следното разбиване на $\mathcal{P}(A, k)$ на две подмножества - X и Y:

В X нека да са тези разбивания на A, в които избраният елемент a_1 сам образува множество. Но това в същност са разбиванията на $A \setminus \{a_1\}$ на $k-1$ подмножества, като към всяко разбиване се добавя множеството $\{a_1\}$, така че $|X| = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$, което съответства на първото събираемо в дясната страна на (1).

В Y остават тези разбивания на A, в които елементът a_1 не е сам в множество. Да разгледаме всички разбивания на $A \setminus \{a_1\}$ на k подмножества, те са $\left\{ n-1 \atop k \right\}$ на брой. От едно такова разбиване можем да получим k на брой разбивания на A на k подмножества като добавим a_1 към всеки елемент на разбиването. Така стигаме до извода, че броят на елементите на Y е $k\left\{ n-1 \atop k \right\}$, което отговаря на второто събираемо в дясната страна на (1).

И така, като приложим принципа на събирането, получаваме $|\mathcal{P}(A, k)| = |X|+|Y|$, от което следва равенството (1).