Пример. Да разгледаме формалната система PA, аксиоматизираща естествените числа. Първичният обект в PA са естествените числа, т.е. променливите и константите интерпретираме като естествени числа, функционалните символи — като операции върху естествени числа, а предикатните символи — като релации върху естествените числа. Когато пишем $\exists x$ или $\forall y$ имаме предвид съответно „съществува (можем да намерим) естествено число“ и „за всяко естествено число“. Функционалните символи на PA са 0, S, $+$ и $.$, като това са първичните операции върху естествени числа, които нямат дефиниции. В PA има един единствен нелогически предикатен символ $<$, която приемаме за първична релация върху естествените числа. За първичните операции и релации са известни, само някои техни основни свойства, които наричаме аксиоми:

N1. $0 \neq Sx$;

N2. $Sx = Sy \to x = y$;

N3. $x + 0 = x$;

N4. $x + Sy = S(x + y)$;

N5. $x.0 = 0$;

N6. $x.Sy = x.y + x$;

N7. $x \not< 0$;

N8. $x < Sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$;

N9. $x < y \vee x = y \vee y < x$;

СИ. $\mathbf{A}_\mathbf{x}[0] \to \forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathbf{A}_\mathbf{x}[S\mathbf{x}]) \to \mathbf{A}$ за всяка формула $\mathbf{A}$ и всяка променлива $\mathbf{x}$.

От схемата за индукцията следва правилото

$$\frac{\mathbf{A}_{\mathbf{x}[0]}, \quad \forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathbf{A}_\mathbf{x}[S\mathbf{x}])}{\mathbf{A}}$$

откъдето благодарение на принципа за обобщението получаваме принципа за индукцията

$$(\text{ПИ})\frac{\mathbf{A}_{\mathbf{x}[0]}, \quad \mathbf{A} \to \mathbf{A}_\mathbf{x}[S\mathbf{x}]}{\mathbf{A}}.$$

Да докажем, че събирането е асоциативно, т.е. че $(x+y)+z = x+(y+z)$ за произволни естествени x, y и z. Нека първо направим това неформално. Нека x и y са произволни естесвени числа. Ще докажем твърдението с индукция по z. Имаме

$$(x + y) + 0 \overset{N3}{=} x + y \overset{N3}{=} x + (y + 0)$$

и значи твърдението е в сила, когато z е 0.

Нека сега z е такова, че $(x + y) + z = x + (y + z)$. Тогава

$$(x+y)+Sz \overset{N4}{=} S((x+y)+z) \overset{\text{и.п.}}{=} S(x+(y+z)) \overset{N4}{=} x+S(y+z) \overset{N4}{=} x+(y+Sz),$$

с което индукционната стъпка, а значи и твърдението са доказани.

Да отбележим, че през цялото доказателство x и y са фиксирани естествени числа. Във втората част на доказателството z също е фиксирано естествено число, което обаче не е съвсем произволно, а отговаря на свойството $(x+y)+z = x+(y+z)$. С други думи, във втората част на доказателството за z имаме допълнителна аксиома.

Сега ще направим форамлно доказателство в PA. По същество то е „превод“ на неформалното доказателство, като в него ще има две основни различия. Първо, във формалното доказателство не можем да пренатоварваме значението на някой символ. Така когато са фиксирани (т.е. играят ролята на константи) вместо x, y и z трябва да използваме други символи, например α, β и γ. Второ, в едно формално доказателство не можем да пишем редица от равенства, от вида $(x+y)+0 = x+y = x+(y+0)$, а трябва да пишем експлицитно всички двойки равенства, които ни интересуват.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{N3,\ \text{ПЗ}}{(\alpha+\beta)+0=\alpha+\beta}\quad\dfrac{N3,\ \text{ПЗ}}{\beta+0=\beta}}{(\alpha+\beta)+0=\alpha+(\beta+0)}\,(\text{Т}=)}{(x+y)+0=x+(y+0)}\,(\text{ТК})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{N3,\ \text{ПЗ}}{(\alpha+\beta)+S\gamma=S((\alpha+\beta)+\gamma)}\quad\dfrac{\text{Допълнителна аксиома (1)}}{(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)}}{(\alpha+\beta)+S\gamma=S(\alpha+(\beta+\gamma))}\,(\text{Т}=)\quad\dfrac{N3,\ \text{ПЗ}}{\alpha+S(\beta+\gamma)=S(\alpha+(\beta+\gamma))}}{(\alpha+\beta)+S\gamma=\alpha+S(\beta+\gamma)}\,(\text{Т}=)\quad\dfrac{N3,\ \text{ПЗ}}{\beta+S\gamma=S(\beta+\gamma)}}{(\alpha+\beta)+S\gamma=\alpha+(\beta+S\gamma)}\,(\text{Т}=)}{(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\to(\alpha+\beta)+S\gamma=\alpha+(\beta+S\gamma)}\,-(1),(\text{ТД})}{(x+y)+z=x+(y+z)\to(x+y)+Sz=x+(y+Sz)}\,(\text{ТК})}{(x+y)+z=x+(y+z)}\,(\text{ПИ})$$

2.9 Разширения с помощта на дефиниции

Нека $\mathcal{F}$ е формална система от първи ред. Нека $\mathbf{D}$ е формула на $\mathcal{F}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Нека $\mathbf{p}$ е нов n-местен предикатен символ. Ще казваме, че $\mathcal{F}'$ е разширение на $\mathcal{F}$ чрез дефиниране на предикатния символ $\mathbf{p}$ с помощта на формулата $\mathbf{D}$, ако $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки предикатния симол $\mathbf{p}$ и дефиниращата аксиома

$$\mathbf{p}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{D}.$$

Нашата основна цел е да докажем, че $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$, като при това за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}'$ съществува формула $\mathbf{A}^*$ на $\mathcal{F}$, такава че

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$$

и

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*.$$

Формулата $\mathbf{A}^*$ ще наричаме превод на $\mathbf{A}$ в $\mathcal{F}$. Така от гледна точка на $\mathcal{F}'$ всяка формула изказва същото, каквото и нейния превод, като при това $\mathcal{F}'$ доказва една формула тогава и само тогава, когато оригиналната система доказва превода ѝ.

За да дефинираме превод на една формула подхождаме по следния начив. Нека $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{F}$. Избираме вариант $\mathbf{D}'$ на $\mathbf{D}$, в който нито една от свързаните променливи не участва във формулата $\mathbf{A}$. Образуваме $\mathbf{A}^*$, замествайки всяко срещане на атомарна формула от вида $\mathbf{pa}_1 \dots \mathbf{a}_n$ с формулата $\mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$.

Забележка. Ако $\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{A}^{*\prime}$ са два различни превода на $\mathbf{A}$, то $\mathbf{A}^{*\prime}$ е вариант на $\mathbf{A}^*$. В частност $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^* \leftrightarrow \mathbf{A}^{*\prime}$.

Твърдение 2.26. $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$.

Доказателство. Предвид теоремата за варианта

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{D}'$$

и значи

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{px}_1 \dots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{D}'.$$

Оттук и правилото за замяната

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{pa}_1 \dots \mathbf{a}_n \leftrightarrow \mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$$

за всеки избор на термове $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, участващи в $\mathbf{A}$. Сега твърдението следва от теоремата за еквивалентната замяна.

□

Твърдение 2.27. Нека $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ е доказателство в $\mathcal{F}'$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$, за $1 \leq i \leq n$ (където всички преводи са направени с един и същи вариант на $\mathbf{D}$).

Доказателство. Ще извършим доказателството с индукция по i. Нека първо $\mathbf{A}_i$ е логическа аксиома на $\mathcal{F}'$. Ако $\mathbf{A}_i$ е съждителна аксиома, т.е. $\mathbf{A}_i \equiv \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$, то $\mathbf{A}_i^* \equiv \neg\mathbf{A}^* \vee \mathbf{A}^*$ и значи $\mathbf{A}_i^*$ е съждителна аксиома на $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}_i$ е аксиома за субституцията, т.е. $\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{A}_\mathbf{x}[\mathbf{a}] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}$, то $\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{A}^*[\mathbf{a}] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}^*$ и значи $\mathbf{A}_i^*$ е аксиома за субституцията на $\mathcal{F}$. Ако $\mathbf{A}_i$ е аксиома за равенството, некасаеща символа $\mathbf{p}$, то $\mathbf{A}_i$ е формула на $\mathcal{F}$ и значи $\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{A}_i$ е аксиома за равенството на $\mathcal{F}$. Ако

$$\mathbf{A}_i \equiv x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to \mathbf{p}x_1 \dots x_n \to \mathbf{p}y_1 \dots y_n,$$

то

$$\mathbf{A}_i^* \equiv x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to \mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[y_1 \dots y_n],$$

и значи $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$ съгласно теоремата за равенството.

Нека сега $\mathbf{A}_i$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}'$. Ако $\mathbf{A}_i$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$, то $\mathbf{A}_i$ не съдържа символа $\mathbf{p}$ и значи $\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{A}_i$ е нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$. Ако

$$\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{px}_1 \dots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{D},$$

то

$$\mathbf{A}_i^* \equiv \mathbf{D}' \leftrightarrow \mathbf{D}$$

и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$ съгласно теоремата за варианта.

Нека сега $\mathbf{A}_i$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_{j_1},\ldots,\mathbf{A}_{j_k}$ $(j_1,\ldots,j_k < i)$. Тъй като е в сила $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^* \equiv \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$ и $(\neg \mathbf{A})^* \equiv \neg \mathbf{A}^*$, то $\mathbf{A}_i^*$ е тавтологично следствие на $\mathbf{A}_{j_1}^*,\ldots,\mathbf{A}_{j_k}^*$. Съгласно индукционното предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_{j_s}^*$ за $1 \le s \le k$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$.

Накрая нека $\mathbf{A}_i$ се получава от $\mathbf{A}_j$ $(j < i)$ чрез (П$\exists$). Тогава $\mathbf{A}_i \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{A}_j \equiv \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$. Тогава $\mathbf{A}_i^* \equiv \exists \mathbf{x} \mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$, $\mathbf{A}_j \equiv \mathbf{A}^* \to \mathbf{B}^*$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$. Съгласно индукционно предположение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_j^*$ и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_i^*$ съгласно (П$\exists$).

□

Теорема 2.28. За всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}'$ е в сила

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*.$$

В частност $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$.

Доказателство. Нека първо $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$. Тогава в $\mathcal{F}'$ има доказателство $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_n \equiv \mathbf{A}$. Оттук и предното твърдение $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*$.

Нека сега $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*$. Тогава $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}^*$. Оттук и $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$ следва $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$.

□

Освен с дефиниция на предикатни символи можем да разширяваме формални системи и с дефиниця на функционални символи. За целта нека $\mathcal{F}$ е формална система и нека $\mathbf{D}$ е формула на $\mathcal{F}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n, \mathbf{y}$. Нека освен това

Т.е. $\mathcal{F}$ доказва, че за всеки избор на $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ съществува единствено $\mathbf{y}$, което удовлетворява свойството $\mathbf{D}$.

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{y} \mathbf{D}$$
$$\vdash_{\mathcal{F}} (\mathbf{D} \mathbin{\&} \mathbf{D}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}']) \to \mathbf{y} = \mathbf{y}',$$

където $\mathbf{y}'$ е нова променлива. Нека $\mathbf{f}$ е нов n-местен фонкционален символ и $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки $\mathbf{f}$ нелогическата аксиома

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{D}.$$

Ще казваме, че $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$ чрез дефиниране на функционален символ, а аксиомата $\mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{D}$ ще наричаме дефинираща аксиома на $\mathbf{f}$.

За да дефинираме превод $\mathbf{A}^*$ на една формула $\mathbf{A}$ от $\mathcal{F}'$, отново разглеждаме вариант $\mathbf{D}'$ на $\mathbf{D}$, в който свързаните променливи не участват в $\mathbf{A}$. Дефинираме $\mathbf{A}^*$ като резултата от заместването на атомарните подформули на $\mathbf{A}$ със съответните им преводи, като превода на атомарна подформула $\mathbf{B}$ извършваме, чрез следната индукция: ако $\mathbf{B}$ не съдържа новия символ $\mathbf{f}$ то $\mathbf{B}^* \equiv \mathbf{B}$. В противен случай можем да запишем $\mathbf{B}$ във вида $\mathbf{B} \equiv \mathbf{C}_{\mathbf{z}}[\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]$, където термовете $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ не съдържат $\mathbf{f}$ и в $\mathbf{C}$ има по-малко срещания на $\mathbf{f}$ отколкото в $\mathbf{B}$. Полагаме

$$\mathbf{B}^* \equiv \exists \mathbf{z}(\mathbf{D}'_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n}[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n] \mathbin{\&} \mathbf{C}^*).$$

Отново е в сила следната теорема, даваща връзката между една формула, нейния превод и доказуемостта в $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$.

Доказателството на теоремата изисква доказателство на няколко теореми, които не са предмет на тази книга.

Теорема 2.29. За всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}'$ са в сила

(1) $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}^*$

(2) $\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^*$.

В частност $\mathcal{F}'$ е консервативно разширение на $\mathcal{F}$.

2.10 Пренексни операции

Теорема 2.30. Нека $\mathcal{F}$ е формална система, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са формули на $\mathcal{F}$ и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$. Тогава

(i) $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \leftrightarrow \forall\mathbf{x}\neg\mathbf{A}$, $\quad\vdash_{\mathcal{F}} \neg\forall\mathbf{x}\mathbf{A} \leftrightarrow \exists\mathbf{x}\neg\mathbf{A}$;

(ii) $\vdash_{\mathcal{F}} (\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \lor \mathbf{B}) \leftrightarrow \exists\mathbf{x}(\mathbf{A} \lor \mathbf{B})$, $\quad\vdash_{\mathcal{F}} (\forall\mathbf{x}\mathbf{A} \lor \mathbf{B}) \leftrightarrow \forall\mathbf{x}(\mathbf{A} \lor \mathbf{B})$

(iii) $\vdash_{\mathcal{F}} (\exists\mathbf{x}\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \leftrightarrow \exists\mathbf{x}(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$, $\quad\vdash_{\mathcal{F}} (\forall\mathbf{x}\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B}) \leftrightarrow \forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$

(iv) $\vdash_{\mathcal{F}} (\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow \forall\mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$, $\quad\vdash_{\mathcal{F}} (\forall\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow \exists\mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$

(v) $\vdash_{\mathcal{F}} (\mathbf{B} \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}) \leftrightarrow \exists\mathbf{x}(\mathbf{B} \to \mathbf{A})$, $\quad\vdash_{\mathcal{F}} (\mathbf{B} \to \forall\mathbf{x}\mathbf{A}) \leftrightarrow \forall\mathbf{x}(\mathbf{B} \to \mathbf{A})$

Доказателство. Твърдения (iii), (iv) и (v) следват от дефиницията на символите конюнкция и импликация и твърдения (i) и (ii). Твърдение (i) следва директно от дефиницията на квантора за общност, теоремата за еквивалентната замяна и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A}$. Нека сега докажем (ii). Имаме

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{A}\to(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})}{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}\to\exists\mathbf{x}(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{П}\exists\exists)\qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{B}\to(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})\qquad \dfrac{}{(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\to\exists\mathbf{x}(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{АСуб})}{\mathbf{B}\to\exists\mathbf{x}(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})}{(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\to\exists\mathbf{x}(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})$$

и

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{A}\to\exists\mathbf{x}\mathbf{A}}\,(\text{АСуб})\qquad \dfrac{}{\exists\mathbf{x}\mathbf{A}\to(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})}{\mathbf{A}\to(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})\qquad \dfrac{}{\mathbf{B}\to(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{П}\exists)}{(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\to(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})}{\exists\mathbf{x}(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\to(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{П}\exists)$$

и следователно $\vdash_{\mathcal{F}} (\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \lor \mathbf{B}) \leftrightarrow \exists\mathbf{x}(\mathbf{A} \lor \mathbf{B})$.

От друга страна

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall\mathbf{x}\mathbf{A}\to\mathbf{A}}\,(\text{ТСуб})\qquad \dfrac{}{\mathbf{A}\to(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})}{\forall\mathbf{x}\mathbf{A}\to(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})\qquad \dfrac{}{\mathbf{B}\to(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})}{(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\to(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})}{(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\to\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{П}\forall)$$

и

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\to(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТСуб})}{(\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\ \&\ \neg\mathbf{B})\to\mathbf{A}}\,(\text{ТТ})}{(\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\ \&\ \neg\mathbf{B})\to\forall\mathbf{x}\mathbf{A}}\,(\text{П}\forall)}{\forall\mathbf{x}(\mathbf{A}\lor\mathbf{B})\to(\forall\mathbf{x}\mathbf{A}\lor\mathbf{B})}\,(\text{ТТ})$$

откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} (\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

□

От теоремата за тавтологиите и теоремата за еквивалентната замяна следва, че твърдения (ii) и (iii) имат и симетрични варианти:

(ii) $\vdash_{\mathcal{F}} (\mathbf{B} \vee \exists \mathbf{x}\mathbf{A}) \leftrightarrow \exists \mathbf{x}(\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$, $\quad \vdash_{\mathcal{F}} (\mathbf{B} \vee \forall \mathbf{x}\mathbf{A}) \leftrightarrow \forall \mathbf{x}(\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$

(iii) $\vdash_{\mathcal{F}} (\mathbf{B} \,\&\, \exists \mathbf{x}\mathbf{A}) \leftrightarrow \exists \mathbf{x}(\mathbf{B} \,\&\, \mathbf{A})$, $\quad \vdash_{\mathcal{F}} (\mathbf{B} \,\&\, \forall \mathbf{x}\mathbf{A}) \leftrightarrow \forall \mathbf{x}(\mathbf{B} \,\&\, \mathbf{A})$

Ще казваме, че една формула е в *пренексен вид*, ако тя има вида

$$Q_1\mathbf{x}_1 \dots Q_n\mathbf{x}_n\mathbf{B},$$

където Q_i е $\exists$ или $\forall$, а $\mathbf{B}$ е безкванторна формула ($\mathbf{B}$ наричаме матрица на формулата $Q_1\mathbf{x}_1 \dots Q_n\mathbf{x}_n\mathbf{B}$). Използвайки пренексните операции, за всяка формула можем да намерим еквивалентна на нея формула в пренексен вид. Наистина, нека $\mathbf{A}$ е произволна формула. Ако $\mathbf{A}$ е атомарна, то $\mathbf{A}$ е безкванторна и значи $\mathbf{A}$ е в пренексен вид. Ясно е, че $\mathbf{A}$ е еквивалентна на себе си. Нека сега $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2$. Тогава, тъй като $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ са получени преди $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ са еквивалентни съответно на пренексните формули

$$Q_1^1\mathbf{x}_1^1 \dots Q_n^1\mathbf{x}_m^1\mathbf{B}_1 \qquad \text{и} \qquad Q_1^2\mathbf{x}_1^2 \dots Q_n^2\mathbf{x}_n^2\mathbf{B}_2 \qquad (*)$$

. Нека

$$Q_1^1\mathbf{z}_1^1 \dots Q_n^1\mathbf{z}_m^1\mathbf{B}_1' \qquad \text{и} \qquad Q_1^2\mathbf{z}_1^2 \dots Q_n^2\mathbf{z}_n^2\mathbf{B}_2'$$

са варианти на формули $(*)$, където $\mathbf{z}_1^1, \dots, \mathbf{z}_m^1, \mathbf{z}_1^2, \dots, \mathbf{z}_n^2$ са нови различни променливи. Тогава от теоремата за еквивалентната замяна, теоремата за варианта и след многократно прилагане на (ii), (iii), (ii') и (iii') получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow Q_1^1\mathbf{z}_1^1 \dots Q_n^1\mathbf{z}_m^1 Q_1^2\mathbf{z}_1^2 \dots Q_n^2\mathbf{z}_n^2(\mathbf{B}_1' \vee \mathbf{B}_2').$$

Нека $\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{A}'$. Тогава тъй като $\mathbf{A}'$ е получена преди $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ е еквивалентна на пренексна формула

$$Q_1^1\mathbf{x}_1^1 \dots Q_n^1\mathbf{x}_n^1\mathbf{B}$$

Тогава от теоремата за еквивалентната замяна и прилагайки многократно (i) получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow Q_1^{\partial}\mathbf{x}_1 \dots Q_n^{\partial}\mathbf{x}_n\neg\mathbf{B},$$

където Q_i^{∂} е $\forall$, ако Q_i е $\exists$, и е $\exists$, ако Q_i е $\forall$.

Накрая, нека $\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{x}\mathbf{A}'$. Тогава $\mathbf{A}'$ е еквивалентна на пренексна формула $\mathbf{A}''$ и от теоремата за еквивалентната замяна имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \leftrightarrow \exists \mathbf{x}\mathbf{A}''.$$

е еквивалентна на формулата

Пример. Формулата

$$(x \neq SS0 \,\&\, \exists y(x = y.SS0)) \to \neg\forall y\forall z(x = yz \to (y = S0 \vee y = x))$$

е еквивалентна на формулата

$$\forall y'\exists y''\exists z'\,((x \neq SS0 \,\&\, x = y'.SS0) \to \neg(x = y''z' \to (y'' = S0 \vee y'' = x)))$$

Забележка. От тавтологията $\forall \mathbf{x} \mathbf{A} \to \forall \mathbf{x} \mathbf{A}$ и (iv) имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{x}(\mathbf{A} \to \forall \mathbf{x} \mathbf{A}).$$

С други думи, всяка формална система може да докаже, че за всяко свойство **A** има обект, който ако има свойството **A**, то всички обекти имат свойството **A**.