Глава 2

Интерполация

2.1 Идея на интерполацията

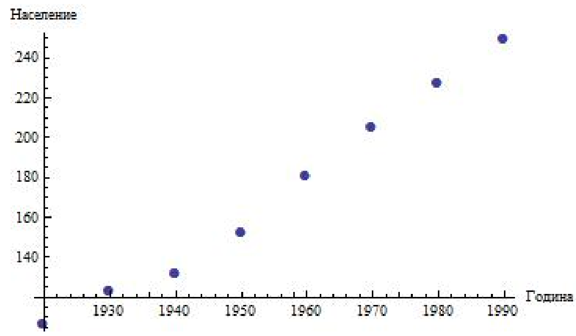
Изучавайки света около нас, ние искаме да намерим зависимости между различни величини. За да се изследва дадено явление или даден процес, е необходимо да се направят експерименти, които да дадат информация за него. След това данните от тези експерименти се използват, за да се създаде математически модел, който ги описва. Нека разгледаме следната задача.

Задача 1. В таблицата са дадени данни за населението на САЩ в млн. в периода 1920-1990.

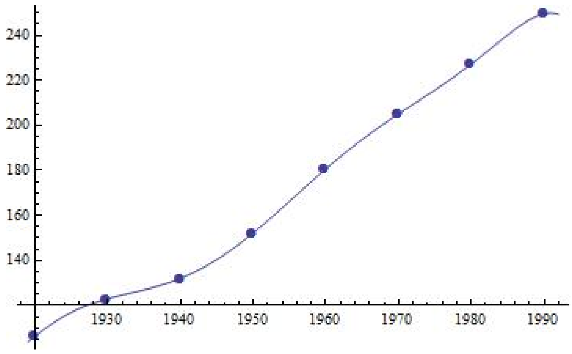
Година	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Население	106.46	123.08	132.12	152.27	180.67	205.05	227.23	249.46

Да се намери функция, описваща изменението на населението през този период.

Коментар по задачата. В случая търсим зависимост между две величини, а резултатите от измерванията можем да интерпретираме геометрично като точки в равнината.



Тогава един възможен начин да опишем това явление е да намерим функция, чиято графика минава през дадените точки.



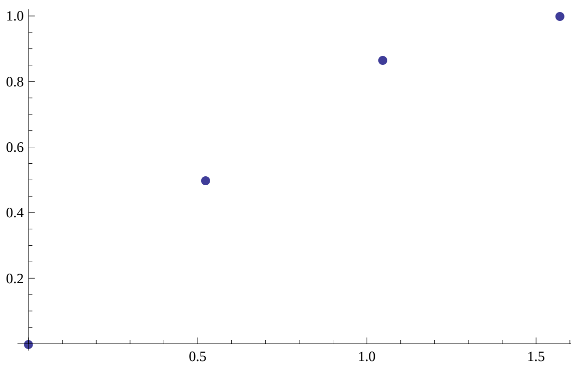
$\square$

Намирането на функция, чиято графика минава през дадени точки, се нарича **интерполация**.

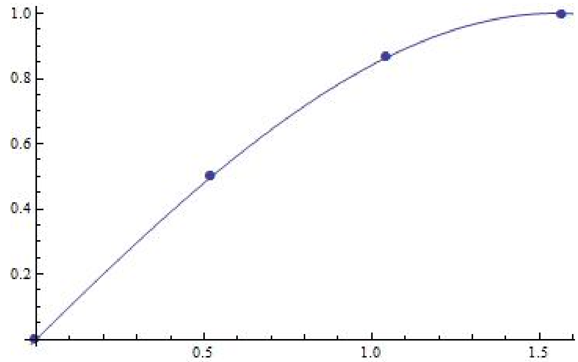
Нека сега разгледаме още една ситуация, в която ще използваме интерполация. На практика често се налага да се намират стойностите в дадена точка на функции като $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$ и др. Както сами можем да се убедим, в общия случай това не изглежда тривиално. Един възможен подход ще илюстрираме със следващия пример.

Задача 2. Да се намери приближение на стойността на функцията $f(x) = \sin x$ за $x = \pi/5$.

Коментар по задачата. Оказва се, че можем да сведем тази задача до аналогична на предходната. Стойността на функцията $f(x) = \sin x$ ни е известна например за $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$ (съответните стойности на $f(x)$ в тези точки са $0, 1/2, \sqrt{3}/2, 1$). Геометрично тази информация е представена на следващата фигура:



Тогава, ако намерим някаква функция $g(x)$, чиято графика да минава през тези точки (и чиято стойност в дадена точка може да бъде лесно пресметната!), ние ще имаме приближение на стойността на $f(x)$.



Така ние ще можем да намерим приблизително $\sin \pi/5$, като пресметнем $g(\pi/5)$. Тук възниква много важният въпрос колко точно ще бъде нашето приближение, т.е. колко ще се отличава неговата стойност от стойността на оригиналната функция. В настоящата глава ще коментираме и него. □

Изобщо казано, интерполацията ни позволява да намерим приближение на дадена функция, използвайки стойностите ѝ в дадени точки.[1] И така, в настоящата глава ние ще търсим отговора на следните въпроси:

- Как да намерим функция, чиято графика минава през дадени точки?
- Как да оценим точността на приближението, което сме получили?

2.2 Интерполационна задача на Лагранж

Алгебричните полиноми са функции, чиято стойност в дадена точка може да бъде пресметната лесно (един бърз алгоритъм за целта е например схемата на Хорнер). Ето защо те се явяват добър избор за решаване на задачата, която си поставихме. И така, ние ще търсим алгебричен полином, който минава през дадени точки. Нека сега формулираме точно поставената вече задача.

Постановка на интерполационната задача на Лагранж.

Нека x_0, x_1, ..., x_n са дадени различни точки от реалната права (възли) и $y_0, y_1, \ldots, y_n$ са дадени реални числа (стойности). Искаме да построим полином $P(x) \in \pi_n$ (π_n – класът от всички алгебрични полиноми от степен, ненадминаваща n) такъв, че

$$\left| \begin{array}{l} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ \qquad \vdots \\ P(x_n) = y_n \end{array} \right. . \tag{2.1}$$

Винаги, когато формулираме една математическа задача, много съществен е въпросът за съществуване и единственост на решението. От гледна точка на програмното реализиране на алгоритми за нейното решение например, е важно да знаем дали задачата винаги е решима и, ако не е, да можем да обработваме съответните изключения. В случая на интерполационната задача на Лагранж е в сила следното твърдение.

[1] Както ще видим по-нататък, можем да наложим условия и върху стойностите на нейните производни, но засега ще разглеждаме ситуацията, когато сме наложили условия само върху стойностите на функцията.

Твърдение 1. *Съществува, при това единствен полином $P(x) \in \pi_n$, удовлетворяващ интерполационната задача на Лагранж за произволни възли и стойности.*

Да отбележим още веднъж, че геометричната интерпретация на тази задача е следната – дадени са $n+1$ точки в равнината и търсим алгебричен полином от степен, ненадминаваща n, чиято графика минава през тези точки.

2.3 Интерполационна формула на Лагранж

Твърдение 2 (Интерполационна формула на Лагранж)**.** *Полиномът, удовлетворяващ условията (2.1), се представя по формулата*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k,$$

където $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ са базисните полиноми на Лагранж. Те изпълняват условията

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{ако } k \neq i \\ 1, & \text{ако } k = i \end{cases}$$

и се задават с формулата

$$l_k(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Ще обясним смисъла на формулата чрез пример.

Задача 3. Като се използва интерполационната формула на Лагранж, да се намери полином $P(x) \in \pi_3$, удовлетворяващ условията

$$P(1) = 2;\ P(2) = 9;\ P(4) = 41;\ P(6) = 97$$

Решение. Нека означим

$$x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6;$$

$$y_0 = 2,\ y_1 = 9,\ y_2 = 41,\ y_3 = 97.$$

Първо ще построим базисните полиноми на Лагранж. За полинома $l_0(x)$ искаме да се нулира във всички възли освен в x_0. В x_0 стойността му трябва да бъде 1. Тогава имаме

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}.$$

Действително, във възлите x_1, x_2, x_3 съответно първият, вторият и третият множител в числителя става 0 и цялата дроб е 0. Във възела x_0 получаваме

$$l_0(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = 1,$$

т.е. така дефинираният полином $l_0(x)$ изпълнява поставените му условия. Като заместим x_0, x_1, x_2, x_3 с техните равни, получаваме окончателно за $l_0(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(1-2)(1-4)(1-6)} = -\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{15}.$$

Аналогично имаме

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(2-1)(2-4)(2-6)} = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{8}; \\ l_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(4-1)(4-2)(4-6)} = -\frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{12}; \\ l_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(6-1)(6-2)(6-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{40}. \end{aligned}$$

Тогава интерполационният полином, удовлетворяващ задачата, може да бъде представен във вида

$$P(x) = l_0(x).y_0 + l_1(x).y_1 + l_2(x).y_2 + l_3(x).y_3.$$

За да се убедим в това, нека проверим какво се случва например в точката $x = x_1$. Имаме $l_0(x_1) = l_2(x_1) = l_3(x_1) = 0$ и $l_1(x_1) = 1$. Тогава

$$P(x_1) = 0.y_0 + 1.y_1 + 0.y_2 + 0.y_3 = y_1.$$

Аналогично се вижда, че този полином удовлетворява интерполационните условия и в другите възли.

И така, получихме

$$P(x) = l_0(x).2 + l_1(x).9 + l_2(x).41 + l_3(x).97.$$

След заместване и опростяване, получаваме окончателно

$$P(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

□

Оттук нататък с $L_n(f;x)$ ще бележим интерполационния полином от ред n за функцията f, а с $\omega(x)$ ще бележим $(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$, където x_0, x_1, $\ldots$, x_n са дадени различни точки.

Задача 4. Да се намери приближено стойността на $\sin\dfrac{\pi}{5}$ и $\sin\dfrac{9\pi}{10}$, като за целта се намери интерполационния полином на Лагранж, които интерполира $\sin x$ във възлите $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$. Да се сравнят получените резултати.

Решение. Търсеният интерполационен полином на Лагранж $L_3(f;x)$ интерполира $\sin x$ в точките $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, т.е. полиномът трябва да минава през точките $(x_k, f(x_k))$ или $(0,0)$, $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$. За целта първо намираме базисните полиноми на Лагранж:

$$l_0(x) = \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{6})(0-\frac{\pi}{3})(0-\frac{\pi}{2})};$$
$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{6}-0)(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})};$$
$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3}-0)(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})};$$
$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})}.$$

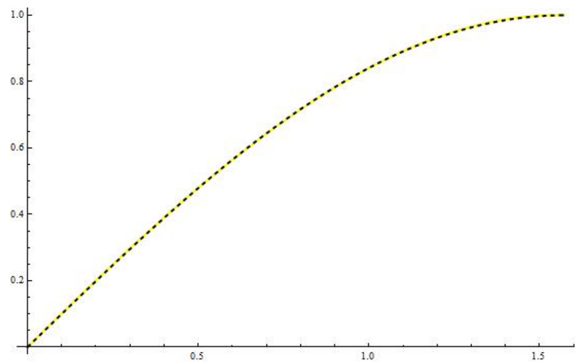
Тогава получаваме

$$L_3(f;x) = l_0(x).0 + l_1(x).\frac{1}{2} + l_2(x).\frac{\sqrt{3}}{2} + l_3(x).1.$$

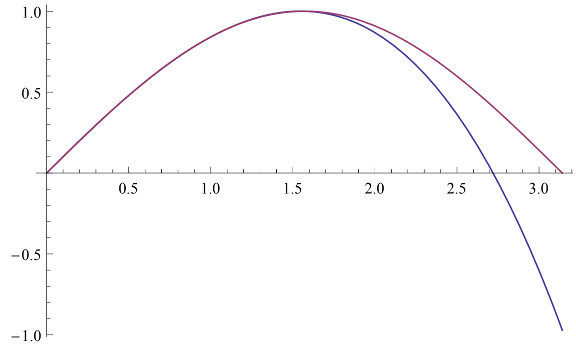
След кратки преобразувания получаваме

$$L_3(x) \approx 1.02043x - 0.0654708x^2 - 0.113872x^3.$$

Да илюстрираме графично полученото приближение, като начертаем на една графика функцията $\sin x$ (която на фигурата е с черната пунктирана линия) с интерполационния полином от степен 3, $L_3(f;x)$ (жълтата непрекъсната линия). Както виждаме, двете графики почти съвпадат в интервала на интерполация $[0, \pi/2]$, което обосновава приближаването на $\sin\frac{\pi}{5}$ с $L_3(f;\frac{\pi}{5})$. Получаваме $L_3\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0.587061$.



От друга страна графиките на $\sin x$ и $L_3(f;x)$ се разминават съществено в интервала $[\pi/2, \pi]$:



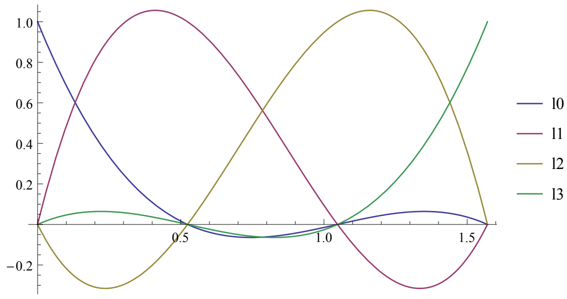
Последното означава, че полученото приближение ще бъде далеч от реалната стойност на $\sin\frac{9\pi}{10}$.

Както виждаме, извън границите на интерполация двете графики сериозно се разминават. $\square$

Дефиниция 1. *Когато използваме интерполационния полином за приближаване на стойност в интервала, определен от интерполационните възли, говорим за* ***интерполация****. В противен случай говорим за* ***екстраполация****.*

При екстраполация не можем да разчитаме на това, че ще получим добро приближение. Полиномът няма точки, за които да се „хване" и ето защо няма как да очакваме неговото поведение да следва това на приближаваната функция.

Нека сега разгледаме графиките на базисните полиноми на Лагранж, които намерихме в предходната задача:



Графиката добре илюстрира условието, което наложихме на базисните полиноми на Лагранж при тяхното дефиниране – всеки от тях има стойност 1 във възела, за който "отговаря" и 0 във всички останали възли.

Дефиниция 2. *Нека са дадени точките $x_0 < \cdots < x_n$. Казваме, че функциите $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуват интерполационен базис, ако*

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{ако } i \neq j, \\ 1 & \text{ако } i = j. \end{cases}$$

Ясно е, че ако $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуват интерполационен базис и във формулата на Лагранж заместим базисните полиноми $l_i(x)$ с $\varphi_i(x)$, то получената функция $\overline{\varphi}(x)$ ще изпълнява условията $\overline{\varphi}(x_i) = y_i$.

Библиография

[1] Боянов, Б.: Лекции по числени методи. Дарба, 2008

[2] Сборник по числени методи – http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/nummeth

[3] Сендов, Бл., Попов, В.: Числени методи. Първа част. Университетско издателство „Св.Климент Охридски”, 1996

[4] Kiusalaas, J.: Numerical Methods in Engineering. Cambridge University Press, 2010

[5] Chapra, S.: Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists. McGraw Hill, 2012

[6] Бахвалов, Н.С., Лапин, А.В., Чижонков, Е.В.: Численные методы в задачах и упражнениях. Высшая школа, 2000

[7] Hollis, S: Manual for Stewart’s Single Variable Calculus. Brooks/Cole, 2008

[8] Antia, H. M.: Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1991