2.4 Теорема за оценка на грешката

Твърдение 1. *Нека $[a,b]$ е даден краен интервал и $x_0,\dots,x_n$ са различни точки в него. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$-ва производна в този интервал. Тогава за всяко $x \in [a,b]$ съществува точка $\xi = \xi(x) \in [a,b]$ такава, че*

$$f(x) - L_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

Задача 1. Да се даде оценка на грешката на апроксимация при приближаването на $\sin x$ с $L_3(f,x)$ с възлите $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$. Да се оцени грешката при $x = \pi/5$ и да се сравни с реално допусната грешка. Да се начертае на една графика оценката на грешката и реално допуснатата грешка.

Решение. За да дадем оценка за това колко „близо” всъщност е стойността, която ние сме намерили, до точната стойност. С други думи, искаме да дадем оценка за грешката

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left|f\left(\frac{\pi}{5}\right) - L_3\left(f;\frac{\pi}{5}\right)\right|.$$

От Твърдение 1 непосредствено следва, че

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!}\left|\omega\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|,$$

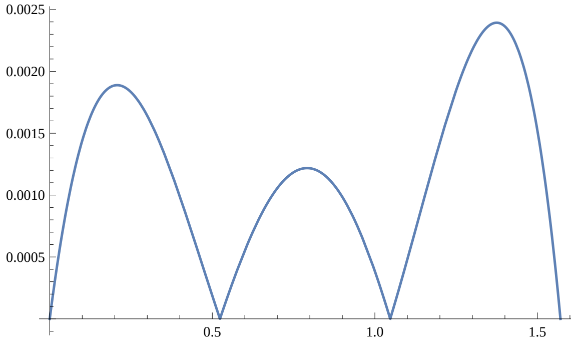
където ξ е число от интервала $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Имаме $f^{(4)}(\xi) = \sin\xi$.В интервала $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ функцията $\sin x$ приема стойности между 0 и 1, т.е. $|f^{(4)}(\xi)| \le 1$. Тогава

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) \le \frac{1}{24}\left|\omega\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| \approx 0.00108232.$$

Окончателно получихме, че грешката по абсолютна стойност не надминава 0.0011. Ако сравним стойността, която ние получихме (0.587061) със стойността, която Mathematica връща за $\sin\frac{\pi}{5}$ (0.587785), ще се убедим, че това действително е така. Обърнете внимание, че това е оценка отгоре за грешката, т.е. тя може и да е значително по-малка.

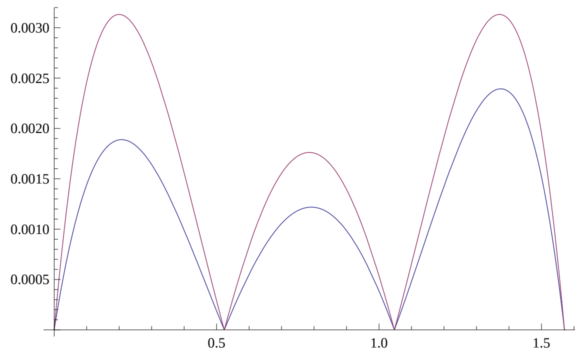
Да обърнем внимание и че можехме да намерим по-добро приближение на $\sin\frac{\pi}{5}$, ако бяхме подбрали интерполационните възли по по-подходящ начин или бяхме взели повече възли.

Привеждаме и графиката на абсолютната грешка (по модул) при приближаването на $\sin x$ с $L_3(f;x)$ в разглеждания интервал:



Допуснатата грешка, както можем да очакваме, във всички точки е не по-голяма от изведената оценка

$$R\left(x\right) \leq \frac{1}{24}\left|\omega\left(x\right)\right| :$$



□

Нека сега разгледаме още един пример, показващ как се оценява грешката при приближаване на дадена функция с нейния интерполационен полином.

Задача 2. Стойността на $\ln 15.2$ е намерена приблизително по следния начин: взети са точните стойности на $\ln 15$ и $\ln 16$ и е използвана линейна интерполация (построен е интерполационният полином от първа степен за възлите $x_0 = 15$ и $x_1 = 16$). Нека с f и p са означени съответно точната и приближената стойност на $\ln 15.2$. Докажете, че

$$0 < f - p < 4.10^{-4}$$

Решение. Нека $f(t) = \ln t$. Тогава грешката е

$$f - p = \frac{f''(\xi)}{2}(15.2-15)(15.2-16), \quad \xi \in (15, 16)$$

Тъй като $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$, получаваме

$$f - p = -\frac{0,2.(-0,8)}{2\xi^2} = \frac{4}{50\xi^2}.$$

От една страна, $x - y$ очевидно е положително. От друга, най-голямата стойност на грешката се достига, когато знаменателят е най-малък, т.е. при $\xi = 15$. Тогава имаме

$$0 < f - p < \frac{4}{50.15^2} = \frac{4}{2.3^2.5^4} < \frac{4}{10^4}.$$

□

Понякога се интересуваме от максималната грешка, която се получава не в дадена точка, а в целия интервал, в който интерполираме.

Задача 3. Да се намери оценка на грешката, която се допуска при приближаването на функцията $f(x) = 1/(1+x)$ в интервала $[0, 1]$ с интерполационния полином на Лагранж от първа степен с възли 0 и 1.

Решение. Имаме
$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$
Тогава
$$R(x) = \frac{2}{2(\xi+1)^3}|(x-0)(x-1)| \leq |(x-0)(x-1)|.$$
В последното неравенство използвахме, че $1/(\xi+1)^3$ достига своя максимум в интервала $[0,1]$ за $\xi = 0$. И така, за да намерим оценка отгоре на грешката $|R(x)|$ в целия интервал, остана да видим колко най-много може да бъде стойността на $|(x-0)(x-1)|$. Ясно е, че максимумът на последната функция се достига за $x = 1/2$ (парабола, която се нулира в 0 и 1 и следователно върхът ѝ е в $1/2$), т.е. окончателно получаваме, че за всяко $x \in [0,1]$
$$R(x) \leq \frac{1}{4}, \ \forall x \in [0,1].$$
$\square$

Библиография

[1] Боянов, Б.: Лекции по числени методи. Дарба, 2008

[2] Сборник по числени методи – http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/nummeth

[3] Сендов, Бл., Попов, В.: Числени методи. Първа част. Университетско издателство „Св.Климент Охридски", 1996

[4] Kiusalaas, J.: Numerical Methods in Engineering. Cambridge University Press, 2010

[5] Chapra, S.: Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists. McGraw Hill, 2012

[6] Бахвалов, Н.С., Лапин, А.В., Чижонков, Е.В.: Численные методы в задачах и упражнениях. Высшая школа, 2000

[7] Hollis, S: Manual for Stewart's Single Variable Calculus. Brooks/Cole, 2008

[8] Antia, H. M.: Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1991