2.8 Интерполиране с обобщени полиноми. Интерполиране с тригонометрични полиноми.

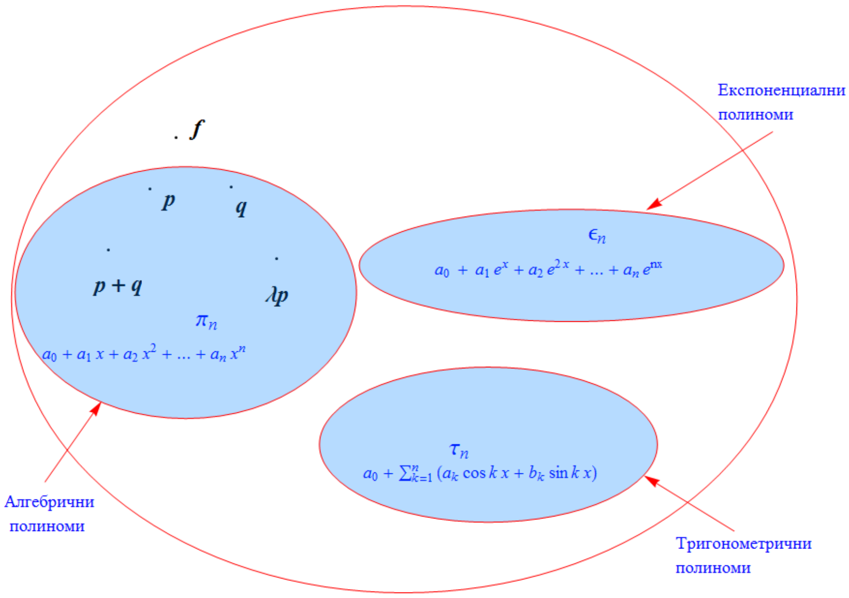
Дотук разглеждахме задачата за намиране на алгебричен полином, чиято графика минава през дадени точки. По-общо въпросът за апроксимиране на дадена функция може да се разглежда така. Дадена е функцията f и искаме да намерим функция g от определен вид, която я приближава (например като я интерполира в дадени възли). Досега ние търсихме функцията g във вид на алгебричен полином, ненадминаващ дадена степен, т.е. я търсихме в множеството π_n.

Множеството от алгебрични полиноми π_n е линейно пространство, тъй като, ако $p, q \in \pi_n$, то

$$p + q \in \pi_n, \quad \lambda p \in \pi_n$$

за кое да е число λ. Казано с други думи, можем да събираме два полинома или да умножаваме полином с число и това, което получаваме, е също полином от степен, ненадминаваща n. Най-простият базис в линейното пространство π_n е $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ и следователно **π_n е крайномерно пространство**, тъй като се поражда от краен брой базисни функции.

Разбира се, вместо да търсим "най-доброто" (в някакъв смисъл) приближение на f във вид на алгебричен полином, т.е. в пространството π_n, можем да търсим друга по вид функция, т.е. от друго линейно пространство, която да е "близо" до f (вж. фигурата по-долу). Например, ако имаме функция f, която расте много бързо, бихме могли да я приближаваме с експоненциален полином, т.е. с функция от линейното пространство, породено от базиса $\{1, e^x, \ldots, e^{nx}\}$. Ако имаме периодична функция f или периодично явление, можем да използваме пространството от тригонометрични полиноми (определящо се от базиса $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\}$). Изобщо, имайки дадена функция, можем да търсим приближението ѝ във вид, който е най-удобен, т.е. отговаря на свойствата на оригиналната функция. Нека отбележим все пак, че **на практика най-често се използват алгебрични полиноми**, тъй като имат редица хубави свойства – лесно се намира стойността им в дадена точка, лесно се диференцират, интегрират и т.н.



Дефиниция 1. *Нека $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ образуват базис на дадено крайномерно линейно пространство. Тогава линейната комбинация*

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

наричаме ***обобщен полином*** *по системата $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$.*

Забележка. Обобщените полиноми са обобщение на алгебричните полиноми. В случая, когато базисът ни е $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, обобщените полиноми са всъщност алгебрични полиноми.

Забележка. Всяко крайномерно линейно пространство има краен базис $\{\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$. Следователно функциите в него представляват обобщени полиноми по дадения базис. **Обобщените полиноми представляват най-общия вид на функции от кое да е крайномерно линейно пространство.**

Предимството на това да работим в крайномерни пространства е, че знаем вида на функциите в тях. Ако търсим обобщем полином от вида

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x),$$

единствените неизвестни са коефициентите в него. Нека са дадени точките $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$. За да намерим обобщения полином $\varphi(x)$, който минава през тях, трябва да решим линейната система $\varphi(x_0) = y_0, \ldots, \varphi(x_n) = y_n$, т.е.

$$\begin{aligned}
a_0\varphi_0(x_0) + \cdots + a_n\varphi_n(x_0) &= y_0, \\
a_0\varphi_0(x_1) + \cdots + a_n\varphi_n(x_1) &= y_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\
a_0\varphi_0(x_n) + \cdots + a_n\varphi_n(x_n) &= y_n.
\end{aligned}$$

Задача 1. В таблицата са дадени данни за развитието на бактериална популация.

t,h	1	2	3	4	5
клетки (x1000)	1	12	110	1037	12218

Да се намери подходяща функция, която интерполира дадените данни.

Решение. Дадените данни предполагат да търсим функцията в линейно пространство от бързо растящи функции, например експоненциални. Имаме 5 дадени точки, следователно ще изберем 5 базисни функции. Нека това са $\{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$. Общият вид на функциите в линейното пространство, породено от този базис, е

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + a_3 e^{3x} + a_4 e^{4x}.$$

Ще определим коефициентите така, че

$$\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 12,\ \varphi(3) = 110,\ \varphi(4) = 1037,\ \varphi(5) = 12218,$$

като решим съответната линейна система.

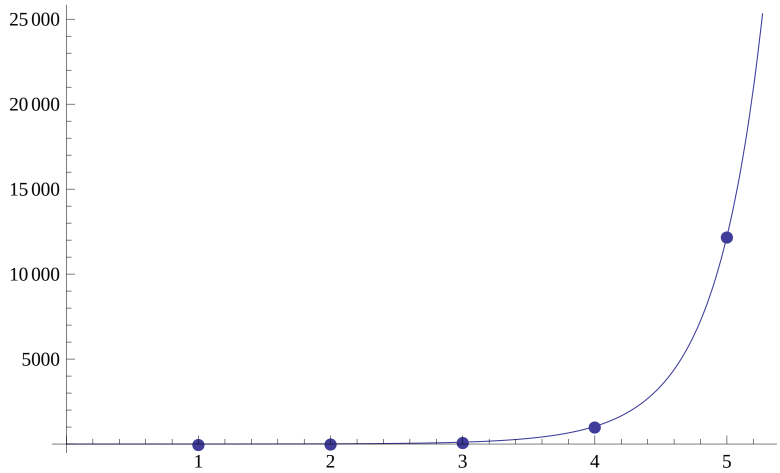
```
In[1]:= ϕ[x_] := a0 + a1 E^x + a2 E^(2 x) + a3 E^(3 x) + a4 E^(4 x)
        sol = NSolve[
          {ϕ[1] == 1, ϕ[2] == 12, ϕ[3] == 110, ϕ[4] == 1037, ϕ[5] == 12218}, {a0, a1, a2, a3, a4}]
```

Out[2]= $\{\{a_0 \to 0.10506,\ a_1 \to -0.382376,\ a_2 \to 0.25728,\ a_3 \to 0.00165052,\ a_4 \to 2.4983 \times 10^{-6}\}\}$

Замествайки коефициентите, получаваме следното.

```
ϕ[x_] = ϕ[x] /. sol[[1]]
plot1 = Plot[ϕ[x], {x, 0, 6}];
plot2 =
  ListPlot[{{1, 1}, {2, 12}, {3, 110}, {4, 1037}, {5, 12218}}, PlotMarkers → ●];
Show[plot1, plot2, PlotRange → All]
```

$0.10506 - 0.382376\, e^{x} + 0.25728\, e^{2x} + 0.00165052\, e^{3x} + 2.4983 \times 10^{-6}\, e^{4x}$



□

Тръгвайки да решаваме дадена интерполационна задача, бихме искали да знаем дали тя има решение и дали то е единствено. Отговорът на този въпрос се дава от т.нар. Чебишови системи.

Дефиниция 2. *Казваме, че функциите $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ образуват* ***Чебишова система*** *(Т-система) в интервала $[a, b]$, ако всеки ненулев обобщен полином по тази система има не повече от n различни нули в дадения интервал.*

Разглеждането на функции, които образуват системи на Чебишов е важно, тъй като е в сила следното твърдение:

Твърдение 1. *Нека функциите $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуват система на Чебишов в интервала $[a, b]$. Тогава при дадени произволни възли $x_0 < \dots < x_n$ в $[a, b]$ и стойности $y_0, \dots, y_n$ интерполационната задача*

$$a_0\varphi_0(x_k) + \dots + a_n\varphi_n(x_k) = y_k, \; k = 0, \dots, n$$

има единствено решение.

С други думи, ако дадени функции образуват система на Чебишов в даден интервал, можем да използваме обобщените полиноми по тази система функции, за решаване на интерполационна задача, в случай, че възлите на интерполация са произволни точки в дадения интервал.

Да разгледаме примери за функции, образуващи Чебишова система.

Задача 1. Да се докаже, че $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ образуват Чебишова система във всеки интервал $[a, b]$.

Решение. Нека вземем един произволен обобщен полином по тази система, т.е. една тяхна произволна линейна комбинация:

$$\varphi(x) = a_0.1 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots + a_n.x^n.$$

Искаме да докажем, че $\varphi(x)$ има не повече от n различни нули в интервала $[a, b]$. Но това е алгебричен полином от степен най-много n и от Основната теорема на алгебрата непосредствено следва, че той има не повече от n нули в кой да е интервал. С това задачата е доказана. □

Забележка. По този начин още веднъж доказахме, че ако $P(x) \in \pi_n$, то интерполационната задача $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ (т.е. интерполационната задача на Лагранж) има единствено решение.

Задача 2. Да се докаже, че $\{x^{2k+1}\}_{k=0}^n$ образуват Чебишова система във всеки интервал $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$.

Решение. Вземаме обобщен полином по тази система:

$$\varphi(x) = a_0x + a_1x^3 + a_2x^5 + \ldots + a_nx^{2n+1}.$$

Искаме да покажем, че той има не повече от n различни нули в интервала $[\alpha, \beta]$ и затова разглеждаме уравнението

$$\varphi(x) = a_0x + a_1x^3 + a_2x^5 + \ldots + a_nx^{2n+1} = 0$$

Тъй като 0 не е в разглеждания интервал, можем спокойно да разделим двете страни на x. Полагаме $x^2 = y$ и получаваме

$$\varphi(x) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \ldots + a_ny^n = 0.$$

Това уравнение има най-много n корена y^*. На всеки такъв корен съответсват два корена за $x - \pm\sqrt{y^*}$. Със сигурност обаче най-много 1 от тях е положителен, т.е. най-много 1 от тях е в интервала $[\alpha, \beta]$. Следователно $\varphi(x)$ има най-много n нули в $[\alpha, \beta]$ и задачата е доказана. □

Със следващата задача ще илюстрираме факта, че това дали дадени функции образуват система на Чебишов зависи съществено от интервала, в който ги разглеждаме.

Задача 3. Да се докаже, че $\{1, \cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \pi)$, но не образуват в $[0, 2\pi)$.

Решение. Ще докажем, че

$$\varphi(x) = a.1 + b.\cos x$$

има най-много 1 нула в интервала $[0, \pi)$. Първо да отбележим, че ако $b = 0$, то, за да има уравнението $\varphi(x) = 0$ корени, е необходимо $a = 0$, но тогава $\varphi(x)$ е нулевият полином. Следователно е достатъчно да разглеждаме $b \neq 0$ и нулите на $\varphi(x)$ се получават при $\cos x = -\frac{a}{b}$. Ако $-1 \leq -\frac{a}{b} \leq 1$ уравнението има 1 решение в интерала $[0, \pi)$, иначе – няма решения. С други думи $\varphi(x)$ наистина има най-много 1 нула в разглеждания интервал и $\{1, \cos x\}$ образуват Чебишова система в него.

Да разгледаме сега същите функции върху интервала $[0, 2\pi)$. Достатъчно е да покажем, че съществува поне един обобщен полином по тази система, който да има повече от 1 нула в $[0, 2\pi)$. Нека вземем

$$\psi(x) = 0.1 + 1.\cos x = \cos x.$$

Той очевидно има 2 корена в $[0, 2\pi)$ и това са $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, т.е. $\{1, \cos x\}$ не образуват система на Чебишов в интервала $[0, 2\pi)$. □

Много важен частен случай на обобщени полиноми са т.нар. тригонометрични полиноми.

Дефиниция 3. *Обобщените полиноми по системата*

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\},$$

които имат вида

$$\tau_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

наричаме тригонометрични полиноми от ред n.

Може да се докаже, че следното твърдение

Твърдение 2. *Нека $\alpha \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} < \alpha + 2\pi$. Тогава за всяка функция f, определена в точките $\{x_i\}_0^{2n}$ съществува единствен тригонометричен полином τ_n от ред n такъв, че*

$$\tau_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, \ldots, 2n.$$

Тъй като тригонометричните полиноми са очевидно 2π-периодични функции, те се явяват удобен апарат за моделиране на периодични явления. Нека разгледаме следния пример:

Задача 4. Да се намери приближено функция $f(x)$, която моделира броя часове слънчева светлина. Променливата x е денят от годината.

Решение. Първо, да отбележим, че за да има смисъл да приближаваме една функция с тригонометричен полином, тази функция трябва да бъде 2π-периодична. Ясно е, че периодът на разглежданото явление е 365 дни. Тогава ще направим линейната смяна

$$t = \frac{2\pi}{365}x.$$

В термините на новата променлива функцията $\overline{f}(t)$ е 2π-периодична. Нека използваме следните данни

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\overline{f}(t)$	9	11.1	14.9	12.9	9

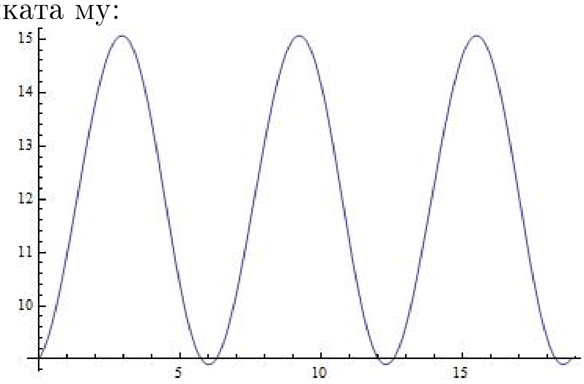
Тези 5 данни могат да определят еднозначно 5 коефициента и следователно можем да построим върху тях тригонометричен полином от ред 2. Търсим го във вида

$$\tau_2(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin_t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t.$$

Решаваме системата, която се задава от условията в таблицата, относно коефициентите, и получаваме приблизително

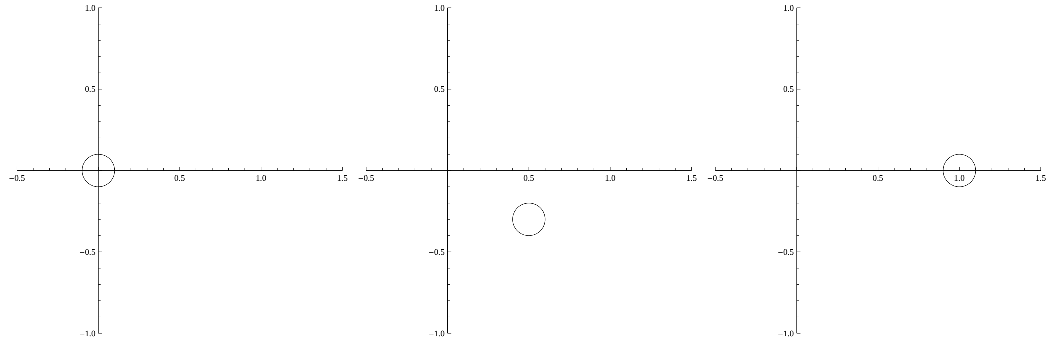
$$\tau_2(t) = 11.975 - 3.00477 \cos t + 0.0297749 \cos 2t + 0.695577 \sin t + 0.0460581 \sin 2t.$$

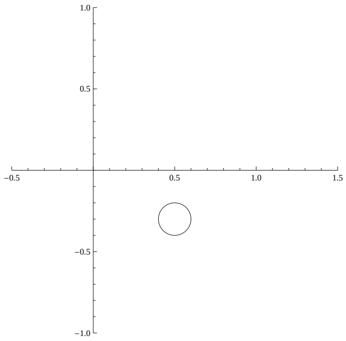
За да добием по-добра представа за характера на разглежданото явление нека изрисуваме графиката му:

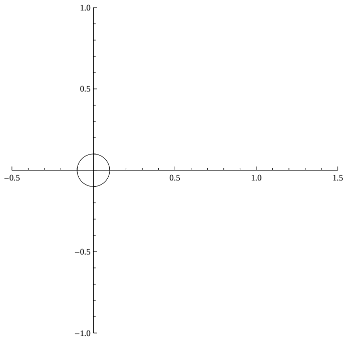


От графиката виждаме как периодично денят се увеличава и намалява. ☐

Да разгледаме движението на махало. Нека в моментите от време $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$ положенията на махалото са съответно:







Очевидно тези позиции описват един пълен период на движението. Нека означим координатите на центъра с $(x(t), y(t))$. Ще моделираме изменението на x-координатата и y-координатата като функции на времето, интерполирайки данните, които имаме, с тригонометрични полиноми от ред 2. За целта е необходимо първо да направим смяна на независимата променлива

$$\bar{t} = \frac{\pi}{2} t,$$

за да може периодът на движението да се описва с интервала $[0, 2\pi]$. Тъй като, според Твърдение 2 възлите на интерполация трябва да лежат в интервала $[0, 2\pi)$, нека приемем за последната позиция, че е измерена в момента от време $\bar{t} = 2\pi - 0.01$, за да можем да определим еднозначно интерполационните полиноми. И така данните, които имаме, можем да систематизираме в следната таблица:

t	0	1	2	3	4
$\bar{t}$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	$2\pi - 0.01$
$x(t)$	0	0.5	1	0.5	0
$y(t)$	0	-0.4	0	-0.4	0

Тъй като имаме по 5 интерполационни условия, можем да определим еднозначно 5 коефициента, т.е. тригонометрични полиноми от втори ред. Търсим ги във вида:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \sin t + a_3 \cos 2t + a_4 \sin 2t$$
$$y(t) = b_0 + b_1 \cos t + b_2 \sin t + b_3 \cos 2t + b_4 \sin 2t$$

За да определим коефициентите, решаваме системата, определена от интерполационните условия.

```
xCoord[t_]:=a0+a1Cos[t]+a2Sin[t]+a3Cos[2t]+a4Sin[2t]
yCoord[t_]:=b0+b1Cos[t]+b2Sin[t]+b3Cos[2t]+b4Sin[2t]
xSol=Solve[{xCoord[0]==0, xCoord[Pi/2]==0.5,xCoord[Pi]==1,
    xCoord[3Pi/2]==0.5,xCoord[2Pi-0.01]==0},Table[ai,{i,0,4}]];
ySol=Solve[{yCoord[0]==0, yCoord[Pi/2]==-0.4,yCoord[Pi]==0,
    yCoord[3Pi/2]==-0.4,yCoord[2Pi-0.01]==0},Table[bi,{i,0,4}]];
xCoord[t_]=xCoord[t]/.xSol[[1]];
yCoord[t_]=yCoord[t]/.ySol[[1]];
```

Сега вече сме готови да анимираме движението на махалото:

```
Animate[Graphics[{Disk[{xCoord[t],yCoord[t]},0.1],Line[{{0.5,0.5},
    {xCoord[t],yCoord[t]}}]},Axes→True,AxesOrigin→{0.5,0.5},
    PlotRange→{{-0.5,1.5},{-1.3,1}}],{t,0,100,0.001}]
```

Както видяхме, можем да намерим дадена интерполационна функция, като решим системата, определена от интерполационните условия. Възниква въпросът защо не използваме метода на неопределените коефициенти за решаването на задачата на Лагранж например. Ще отговорим на този въпрос, като разгледаме следната задача:

Задача 5. Дадени са точките $(i, i+1), i = \overline{1, n}$. Да се намери алгебричен полином, $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, който ги интерполира за $n = 10$ и $n = 250$. Да се сравни с точното решение, което и в двата случая очевидно е $p(x) = x + 1$.

Решение. Коефициентите на полинома в двата случая са решенията на системите $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$, където

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{b} = (2, 3, \ldots, n+1)^T.$$

Неизвестният вектор **c** съдържа коефициентите на полинома $(a_0, \ldots, a_n)^T$.

Решаваме системата първо за $n = 10$:

```
n = 10;
A = Table[Table[i^(j - 1), {j, 1, n}], {i, 1, n}] // N;
b = Table[i + 1, {i, 1, n}] // N;
LinearSolve[A, b]
```

Като резултат получаваме предупреждение от Mathematica, че може да се съдържат значителни грешки от закръгляване:

```
LinearSolve::luc : Result for LinearSolve of badly conditioned matrix
  {{1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.}, {1., 2., 4., 8., 16., 32., 64., 128., 256., 512.}, {1., 3., 9., 27., 81., 243., 729., 2187.,
     6561., 19683.}, ≪5≫, {1., 9., 81., 729., 6561., 59049., 531441., 4.78297×10^6, 4.30467×10^7, 3.8742×10^8},
   {1., 10., 100., 1000., 10000., 100000., 1.×10^6, 1.×10^7, 1.×10^8, 1.×10^9}}
  may contain significant numerical errors. ≫

Out[8]= {1., 1., -1.26461×10^-13, 7.68156×10^-14, -2.80325×10^-14, 6.43128×10^-15,
   -9.33821×10^-16, 8.31786×10^-17, -4.14131×10^-18, 8.81129×10^-20}
```

Сравнявайки с точния резултат, който би трябвало да е $(1, 1, 0, \ldots, 0)$ виждаме, че получените грешки, макар и да са малки са над машинната точност (приблизително 10^{-15}), т.е. можем да ги считаме за значими.

Този ефект обаче става драстичен при $n = 250$:

```
In[12]:= n = 250;
         A = Table[Table[i^(j - 1), {j, 1, n}], {i, 1, n}] // N;
         b = Table[i + 1, {i, 1, n}] // N;
         LinearSolve[A, b]
```

Прилагаме получения резултат за първите няколко коефициента:

```
{-4.3192×10^51, 4.74552×10^51, -4.63088×10^50, 4.16713×10^49, -5.31441×10^48,
  4.30144×10^47, -2.0622×10^46, 6.27201×10^44, -1.27835×10^43, 1.88361×10^41,
```

Виждаме, че тук той няма нищо общо с действителността.

Причината е в едно свойство на матрицата на системата, което се нарича лоша обусловеност. Това означава, че за някои матрици (сред които е и матрицата на интерполационната задача) малки грешки във входните данни (които са неизбежни, когато работим с числа с плаваща точка) водят до големи грешки в резултата. Ето защо в случаите, когато можем да избегнем необходимостта от решаване на система за определяне на дадена интерполационна функция, е добре да го направим.

Да обърнем внимание, че ако решавахме задачата символно, Mathematica щеше да върнш напълно точен резултат. Символното смятане обаче е неприложимо при голям брой операции, тъй като низовете (особено при наличието на дроби, ирационални числа и др.) бързо стават твърде големи и компютърът не може да работи с тях. □

Библиография

[1] Боянов, Б.: Лекции по числени методи. Дарба, 2008

[2] Сборник по числени методи – http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/nummeth

[3] Сендов, Бл., Попов, В.: Числени методи. Първа част. Университетско издателство „Св.Климент Охридски", 1996

[4] Kiusalaas, J.: Numerical Methods in Engineering. Cambridge University Press, 2010

[5] Chapra, S.: Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists. McGraw Hill, 2012

[6] Бахвалов, Н.С., Лапин, А.В., Чижонков, Е.В.: Численные методы в задачах и упражнениях. Высшая школа, 2000

[7] Hollis, S: Manual for Stewart's Single Variable Calculus. Brooks/Cole, 2008

[8] Antia, H. M.: Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1991