Глава 3

Приближения в линейни нормирани пространства.

3.1 Метод на най-малките квадрати

Дотук разгледахме различни начини за решаване на следната задача:

Дадени са точките (x_0, y_0),...,(x_n, y_n). Търсим функция, чиято графика минава точно през тези точки. Както отбелязахме, една възможна интерпретация на тази задача, от гледна точка на практиката, е че са направени краен брой измервания (експерименти) при изследването на дадено явление и търсим функция, която да моделира явлението, като отговаря на тези емпирични резултати. И с най-съвършената техника обаче има някаква допустима грешка при правенето на тези измервания. В много случаи тази грешка не може да бъде пренебрегната. Тогава какъв би бил смисълът да намерим функция, която да минава през тези точки, след като дори самите те не са „на мястото си”? Друг проблем, който видяхме при интерполацията е, че често полиномите от висока степен имат „лошо” поведение, т.е. може да имаме проблеми при моделирането на явление, за което искаме да приближим голямо количество данни.

Оказва се, че можем да постъпим и по друг начин – да търсим функция, която следва поведението на данните (без задължително да съвпада с тях в която и да е точка) и която е „близо” до тези данни.

Преди да коментираме самия метод, нека разгледаме няколко реални процеса и да коментираме каква функция е подходяща, за да ги опише (на база на данните, които имаме).

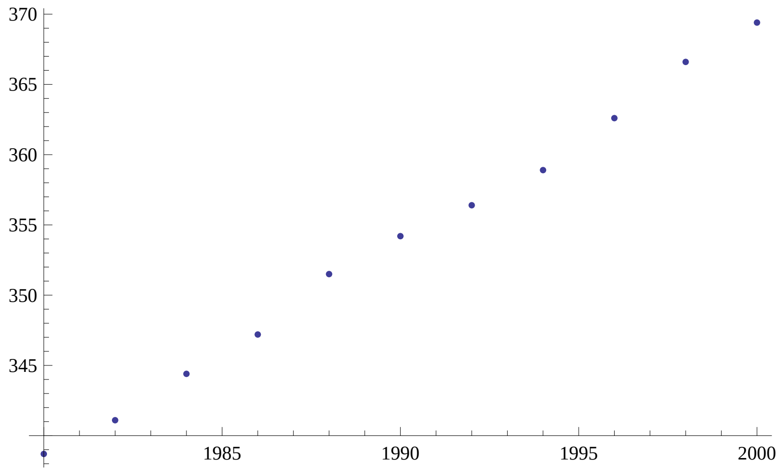
- В таблицата са дадени данни за това как нивото на въглеродния диоксид в атмосферата се е изменяло в периода 1980 – 2000.

Год.	1980	1982	1984	1986	1988	1990
CO_2	338.7	341.1	344.4	347.2	351.5	354.2

Год.	1992	1994	1996	1998	2000
CO_2	356.4	358.9	362.6	366.6	369.4

```
In[169]:= ListPlot[{{1980, 338.7}, {1982, 341.1}, {1984, 344.4},
    {1986, 347.2}, {1988, 351.5}, {1990, 354.2}, {1992, 356.4},
    {1994, 358.9}, {1996, 362.6}, {1998, 366.6}, {2000, 369.4}}]
```

Out[169]=



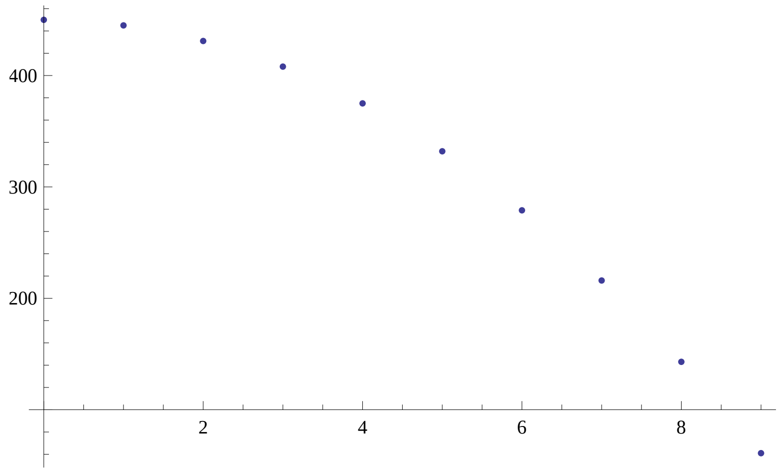
Графиката ни показва, че би било удачно да моделираме разглежданото явление с линейна функция. С други думи, ще търсим приближението във вида $f(x) = ax + b$.

- Топка е пусната от височина $450m$. Нейната височина е измервана през интервали от 1 сек.

t, sec	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h, m	450	445	431	408	375	332	279	216	143	61

In[170]:=
```
ListPlot[{{0, 450}, {1, 445}, {2, 431}, {3, 408},
  {4, 375}, {5, 332}, {6, 279}, {7, 216}, {8, 143}, {9, 61}}]
```

Out[170]=

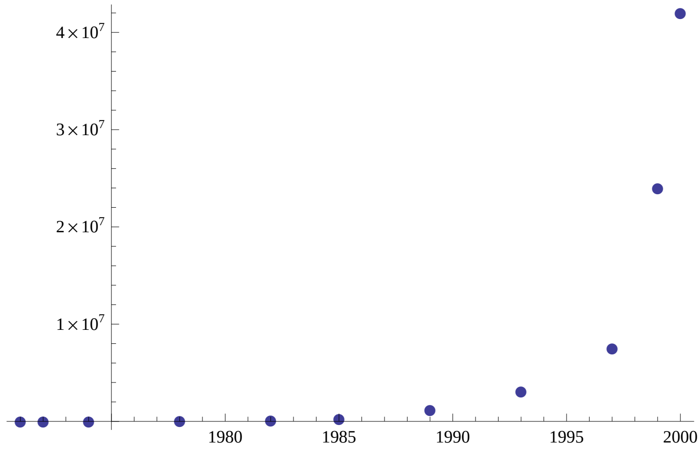


Тук точките изглеждат върху парабола. Затова ще търсим функцията, моделираща процеса, във вида $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Разглеждаме как се изменя броя на транзисторите в един процесор в хиляди, в зависимост от годината

Год.	1971	1972	1974	1978	1982	1985	1989	1993	1997	1999	2000
Бр. ($\times$1000)	2.25	2.5	5	29	120	275	1180	3100	7500	24000	42000

In[48]:=
```
x = {1971, 1972, 1974, 1978, 1982, 1985, 1989, 1993, 1997, 1999, 2000};
y = {2250, 2500, 5000, 29 000, 120 000,
   275 000, 1 180 000, 3 100 000, 7 500 000, 24 000 000, 42 000 000};
pointsPlot = ListPlot[Transpose[{x, y}], PlotMarkers → ●]
```



Тук, на база на експерименталните данни, следва да търсим експоненциална зависимост. Ще търсим функцията във вида $f(x) = ae^{bx}$.

Ще оставим тези 3 процеса за малко и ще се върнем към тях, след като първо изясним метода, по който ще търсим съответните функции.И така, от горните примери е ясно, че след като сме избрали вида на функцията, с която ще приближаваме, трябва да определим параметрите в нея (например коефициентите на квадратния тричлен във втория пример) така, че функцията да се окаже възможно „най-близо" до данните, които приближаваме. Първото, което трябва да направим, е вече да формализираме понятието „близо".

Нека точките, които искаме да приближим, имат координати

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

а $f(x)$ е функция, с която ги приближаваме. Да означим с e_i грешката, т.е. разликата между действителната и приближената стойност в точката x_i

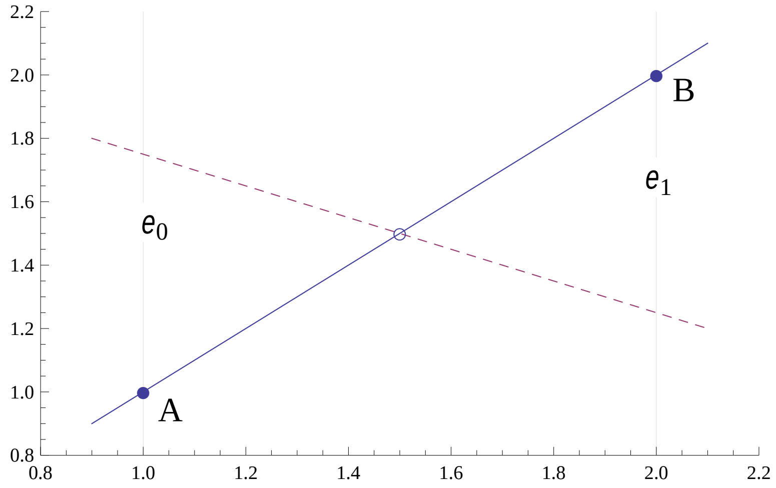
$$e_i := f(x_i) - y_i.$$

Да разгледаме някои възможни (но, по една или друга причина, неудачни) начини за да дефинираме понятието „най-близо":

- Първата очевидна идея е да търсим функцията $f(x)$ така, че сумата от всички грешки да е възможно най-малка, т.е. да е възможно най-малко

$$\sum_{i=0}^{n} e_i.$$

  Да разгледаме обаче следния пример (вж. фигурата). Имаме две точки в равнината $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$. Търсим линейна функция, която да е „най-близо" до тях. Очевидно, това би следвало да е правата, която минава през тези две точки. Но, ако вземем произволна друга права, която минава през средата на отсечката AB, за нея също ще е изпълнено $e_0 + e_1 = 0$, тъй като в точките A и B грешките ще имат една и съща абсолютна стойност и ще са различни по знак. С други думи, всяка такава права ще удовлетворява условието $\sum_{i=0}^{n} e_i$ да е минимално.



- Възможен начин да избегнем проблема е да не позволим грешките да бъдат с различни знаци, т.е. да ги вземаме по модул и да поставим условието функцията $f(x)$ да е избрана така, че

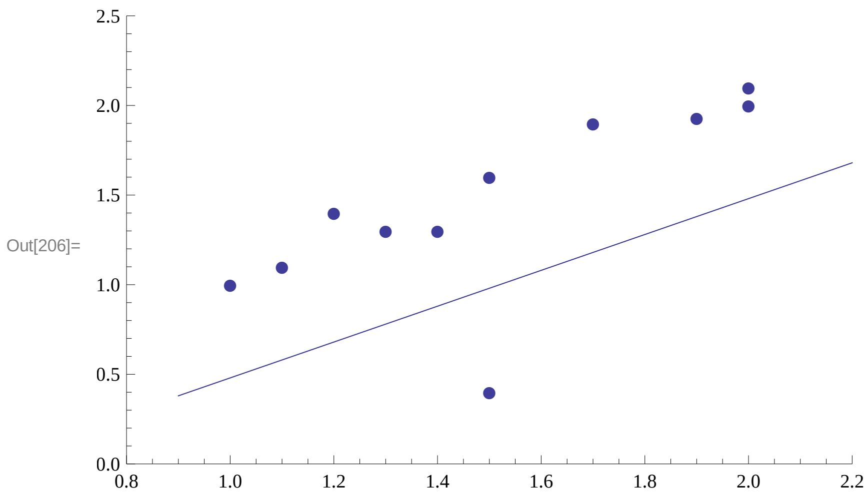
$$\sum_{i=0}^{n} |e_i|$$

да е минимално. Оказва се обаче, че и при това условие (макар и напълно логично и удовлетворително) в общия случай не можем да намерим единствена функция, която да го изпълнява.

- Можем да подберем функцията $f(x)$ така, че да е най-малка максималната грешка, т.е. да е най-малко

$$\max_{i=0}^{n} e_i.$$

Да вземем обаче следния пример:



Всички точки, с изключение на една, лежат приблизително на права, но тази „странична” точка, която вероятно е резултат от шум или грешка в измерванията, има в някакъв смисъл същото влияние върху избора на правата, както всички останали, взети заедно.

И така, след като показахме някои неудачни начини, сега вече да се концентрираме върху същността на **метода на най-малките квадрати**. Търсим функцията $f(x)$ така, че

$$\sum_{i=0}^{n} e_i^2$$

да е възможно най-малко. Освен, че решава проблема с наличието на различни знаци при сумирането на грешките, оказва се, че този подход води и до единствено решение.

Задачата за минимизиране на тази сума може да се интерпретира и по друг начин. Нека означим с y и F съответно векторите с елементи точните и приближените стойности

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$$
$$F = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

Тогава $e = F - y$ ще бъде векторът с грешките

$$e = (e_0, e_1, \ldots, e_n).$$

За него имаме

$$|e| = \sqrt{e_0^2 + e_1^2 + \ldots + e_n^2},$$

т.е. задачата за минимизиране на сумата

$$\sum_{i=0}^{n} e_i^2$$

можем да разглеждаме и като минимизиране на дължината на вектора на грешката.

Следващата стъпка е да покажем как точно ще намерим функцията $f(x)$ така, че тази сума да е възможно най-малка. Ще го покажем с пример

Задача 1. Да се намери линейна функция, която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	2	1	0	4

Решение. От условието следва, че ще търсим функцията във вида $f(x) = ax+b$. Трябва да определим параметрите a и b така, че

$$\sum_{i=0}^{4} e_i^2 = \sum_{i=0}^{4} (f(x_i) - y_i)^2$$

да е възможно най-малко. Имаме

$$f(0) = b;\ f(1) = a + b;\ f(2) = 2a + b;\ f(3) = 3a + b;\ f(4) = 4a + b.$$

Тогава

$$\sum_{i=0}^{4} e_i^2 = (b-1)^2 + (a+b-2)^2 + (2a+b-1)^2 + (3a+b-0)^2 + (4a+b-4)^2.$$

Разглеждаме този израз като функция на двете променливи a и b (нека я означим с $\Phi(a,b)$). Необходимо условие тази функция да има минимум в дадена точка е първите частни производни по отношение на всеки параметър да са нули. Получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{array} \right.$$

По този начин получаваме система с толкова уравнения, колкото са и параметрите в задачата. Решаваме я и еднозначно определяме a и b.

$$\left| \begin{array}{r} 2(a+b-2)+2(2a+b-1).2+2(3a+b).3+2(4a+b-4).4=0 \\ 2(b-1)+2(a+b-2)+2(2a+b-1)+2(3a+b)+2(4a+b-4)=0 \end{array} \right.$$

Окончателно имаме $a = \dfrac{2}{5}$, $b = \dfrac{4}{5}$. Така получихме търсената функция във вида

$$f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}.$$

□

Задача 2. По метода на най-малките квадрати да се намери парабола, която приближава таблицата

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-4	15	-9	10	7	6

Решение. Търсим функцията във вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Трябва да минимизираме сумата

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{5} e_i^2 &= (f(-2)-(-4))^2 + (f(-1)-15)^2 + (f(0)-(-9))^2 + (f(1)-10)^2 \\ &+ (f(2)-7)^2 + (f(3)-6)^2 \\ &= (4a-2b+c+4)^2 + (a-b+c-15)^2 + (c+9)^2 + (a+b+c-10)^2 \\ &+ (4a+2b+c-7)^2 + (9a+3b+c-6)^2 = \Phi(a,b,c) \end{aligned}$$

За да бъде минимална тази сума коефициентите a, b, c трябва да са такива, че да удовлетворяват системата

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{array} \right. .$$

Нека решим тази система с помощта на системата Mathematica:

```
In[5]:= Φ[a_, b_, c_] := (4 a - 2 b + c + 4) ^2 + (a - b + c - 15) ^2 +
          (c + 9) ^2 + (a + b + c - 10) ^2 + (4 a + 2 b + c - 7) ^2 + (9 a + 3 b + c - 6) ^2
        Solve[{∂aΦ[a, b, c] == 0, ∂bΦ[a, b, c] == 0, ∂cΦ[a, b, c] == 0}, {a, b, c}]
```

Out[6]= $\left\{\left\{a \to -\dfrac{2}{7},\ b \to \dfrac{11}{7},\ c \to \dfrac{30}{7}\right\}\right\}$

Тогава получихме окончателно

$$f(x) = -\frac{2}{7}x^2 + \frac{11}{7}x + \frac{30}{7}$$

□

И така, след като изяснихме самия метод, нека се върнем към трите модела, които разгледахме.

Задача 3. Да се намери подходяща функция, която моделира изменението на нивото на въглероден диоксид в атмосферата (вж. таблицата на стр. 1).

Решение. Казахме, че ще търсим приближението във вида $f(x) = ax + b$. За да определим коефициентите a и b, трябва да решим системата

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{array} \right. ,$$

където

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=0}^{10} (f(x_i) - y_i)^2.$$

Нека направим това в Mathematica:

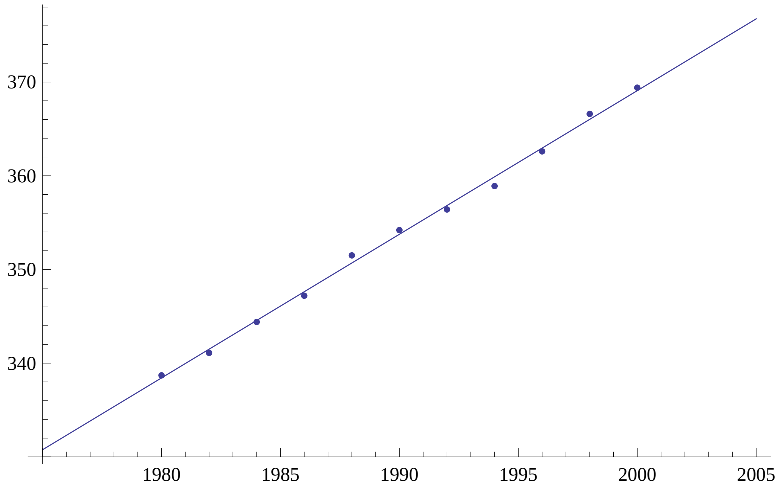
```
In[19]:= f[x_] := a x + b
         Φ[a_, b_] := (f[1980] - 338.7)^2 + (f[1982] - 341.4)^2 +
           (f[1984] - 344.4)^2 + (f[1986] - 347.2)^2 + (f[1988] - 351.5)^2 +
           (f[1990] - 354.2)^2 + (f[1992] - 356.4)^2 + (f[1994] - 358.9)^2 +
           (f[1996] - 362.6)^2 + (f[1998] - 366.6)^2 + (f[2000] - 369.4)^2
         coeffs = Solve[{∂a Φ[a, b] == 0, ∂b Φ[a, b] == 0}, {a, b}]

Out[21]= {{a → 1.53273, b → -2696.37}}
```

Да илюстрираме графично:

```
In[27]:= plot1 = ListPlot[{{1980, 338.7}, {1982, 341.1}, {1984, 344.4},
             {1986, 347.2}, {1988, 351.5}, {1990, 354.2}, {1992, 356.4},
             {1994, 358.9}, {1996, 362.6}, {1998, 366.6}, {2000, 369.4}}];
         plot2 = Plot[f[x] /. coeffs[[1]], {x, 1975, 2005}];
         Show[plot1, plot2]
```

Out[29]=



□

Преди да се концентрираме върху третия модел ще коментираме една техника, която е полезна в определени ситуации.

Нека търсим приближението във вида $f(x) = \alpha e^{\beta x}$. Очевидно в този случай системата уравнения, която ще получим за параметрите a и b ще бъде нелинейна. Разбира се, можем да я решаваме в този вид, но можем да подходим и по друг начин. Имаме

$$y_i \approx f(x_i) = \alpha e^{\beta x_i}$$

Тогава, логаритмувайки двете страни, получаваме

$$\ln y_i \approx \ln \alpha + \beta x_i$$

и сега отново определяме коефициентите така, че да минимизират

$$\sum_{i=0}^{n} {e_i}^2,$$

но за e_i вземаме $\ln y_i - (\ln \alpha + \beta x_i)$ (т.е. минимизираме $\sum\limits_{i=0}^{n} (\ln y_i - \ln f(x_i))^2$. Полагайки $\ln \alpha = c$, получената система ще е линейна спрямо c и β. След като намерим c, връщайки се в полагането, имаме $\alpha = e^c$.

Ще илюстрираме тази техника с пример след малко, но първо да видим още една подобна ситуация (не е правено на упражнения):

Търсим приближението във вида

$$f(x) = \frac{\alpha x}{\beta + x}.$$

С други думи, имаме

$$y_i \approx \frac{\alpha x_i}{\beta + x_i}$$

Вземаме реципрочните стойности на двете страни и имаме

$$\frac{1}{y_i} \approx \frac{\beta}{\alpha} x_i + \frac{1}{\alpha}.$$

Дефинираме

$$e_i := \frac{1}{y_i} - \left(\frac{\beta}{\alpha} x_i + \frac{1}{\alpha} \right),$$

полагаме $\dfrac{\beta}{\alpha} = A$ и $\dfrac{1}{\alpha} = B$ и получената система ще бъде линейна спрямо A и B.

След тези предварителни сведения вече сме готови да моделираме и третия пример от началото на параграфа (за броя на транзисторите).

Задача 4. Да се намери функция от вида $f(x) = Ae^{Bx}$, която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата от стр. 2

Решение. От графиката на таблицата видяхме, че е удачно да търсим приближението във вида

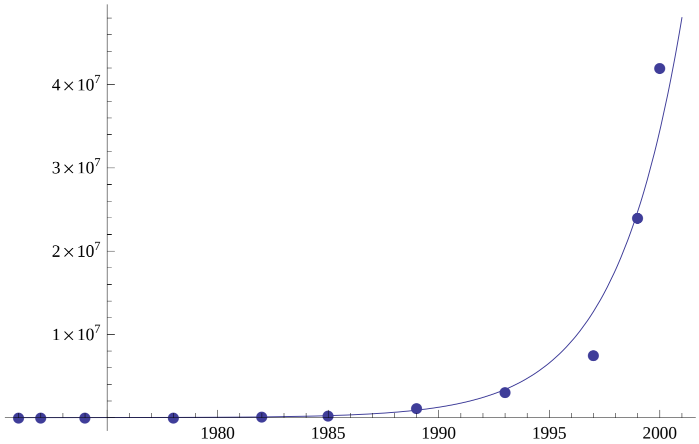
$$f(x) = ae^{bx}$$

Както казахме, ще минимизираме сумата от квадратите не на $f(x_i) - y_i$, а на $\ln f(x_i) - \ln y_i$, т.е. на разликата от логаритмите на приближената и точната стойност. С други думи, искаме да определим коефициентите a и b така, че

$$\sum (f(x_i) - (c + bx_i))^2,$$

където $c = \ln a$, да е възможно най-малко.

```
In[72]:= linearExp[x_] := c + b * x
         errLinearExp = Sum[(Log[y[[i]]] - linearExp[x[[i]]])^2, {i, 1, Length[x]}];
         sLinearExp = NSolve[{D[errLinearExp, c] == 0, D[errLinearExp, b] == 0}, {c, b}][[1]]
         Show[Plot[(E^(c+b*x)) /. sLinearExp, {x, 1971, 2001}, PlotRange -> All], pointsPlot]
```



□

Нека сега разгледаме в общ вид задачата за приближаване на точките

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_s, y_s)$$

с алгебрични полиноми. Т.е. ще търсим приближението във вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Функцията, която трябва да минимизираме, има вида

$$\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{s} (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{s} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \cdots + a_n x_i^n - y_i)^2$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0 \end{array} \right.$$

За да определим коефициентите на полинома, трябва да решим системата След като диференцираме и разделим двете страни на всяко уравнение на 2, получаваме

$$\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \cdots + a_nx_i^n - y_i) = 0 \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \cdots + a_nx_i^n - y_i)x_i] = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}[(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \cdots + a_nx_i^n - y_i)x_i^n] = 0
\end{array}\right.$$

Записана в матричен вид, тази система изглежда така:

$$\begin{bmatrix}
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}1 & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^2 & \cdots & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^n \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^2 & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^3 & \cdots & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^{n+1} \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^2 & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^3 & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^4 & \cdots & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^{n+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^n & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^{n+1} & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^{n+2} & \cdots & \displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^{2n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}y_i \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_iy_i \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^2y_i \\
\vdots \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{s}x_i^ny_i
\end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Нека означим матрицата на системата с X, вектор-стълба с коефициентите с a и вектор-стълба с десните страни с y. Тогава системата добива вида

$$Xa = y$$

и получаваме коефициентите по формулата

$$a = X^{-1}y.$$

Вземайки предвид матричното представяне на системата уравнения, нека отново приближим данните от задача 1:

Задача 5. По метода на най-малките квадрати да се намери полином от първа степен, който приближава точките

x	0	1	2	3	4
y	1	2	1	0	4

Решение. Търсим приближението във вида $f(x) = a_0 + a_1x$. Вземайки предвид (3.1), получаваме матричното уравнение

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}}_{X}\underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}}_{y}$$

Сега имаме $c = A^{-1}y$. Решаваме в Mathematica:

```
In[4]:= X = {{5, 10}, {10, 30}};
        y = {{8}, {20}};
        a = Inverse[X].y // MatrixForm
```

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Окончателно получихме $f(x) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}x$. □

Да дадем още един пример.

Задача 6. Да се намери параболата, която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	4	-1	1	5	6	13

Решение. Търсим приближението във вида $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Ще работим отново в Mathematica:

In[22]:=

$$\texttt{Do}[x_i = i - 4, \{i, 1, 7\}];$$

$$y_1 = 7;\ y_2 = 4;\ y_3 = -1;\ y_4 = 1;\ y_5 = 5;\ y_6 = 6;\ y_7 = 13;$$

$$X = \left\{\left\{7, \sum_{i=1}^{7} x_i, \sum_{i=1}^{7} x_i^2\right\}, \left\{\sum_{i=1}^{7} x_i, \sum_{i=1}^{7} x_i^2, \sum_{i=1}^{7} x_i^3\right\}, \left\{\sum_{i=1}^{7} x_i^2, \sum_{i=1}^{7} x_i^3, \sum_{i=1}^{7} x_i^4\right\}\right\};$$

$$Y = \left\{\left\{\sum_{i=1}^{7} y_i\right\}, \left\{\sum_{i=1}^{7} x_i\, y_i\right\}, \left\{\sum_{i=1}^{7} x_i^2\, y_i\right\}\right\};$$

```
a = Inverse[X].Y // MatrixForm
```

Out[12]//MatrixForm=

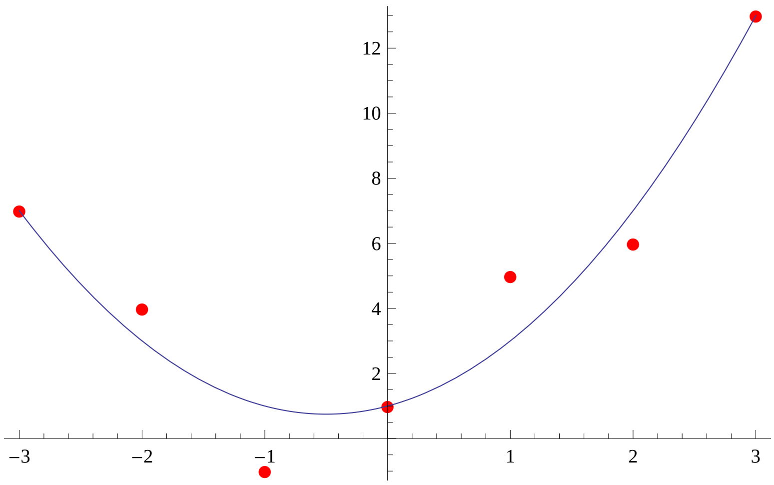
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Така получихме, че $f(x) = 1 + x + x^2$. Нека илюстрираме графично, като изчертаем графиката на полинома и точките в една координатна система:

In[19]:=

```
plot1 = ListPlot[Table[{x_i, y_i}, {i, 1, 7}], PlotStyle → Red, PlotMarkers → ●];
plot2 = Plot[x^2 + x + 1, {x, -3, 3}];
Show[plot1, plot2]
```

Out[21]=



□

Сега ще покажем как можем да използваме метода на най-малките квадрати, за да решаваме преопределени системи. С други думи ще търсим възможно най-доброто решение (в смисъл, който ще дефинираме по-долу) за система, която има повече уравнения, отколкото неизвестни.

Задача 7. Да се реши преопределената система

$$\left|\begin{aligned} &x - y = 1 \\ &x + y = 1 \\ &x + y = -1 \\ &x - y = -1 \end{aligned}\right.$$

Решение. Отново ще приложим същата идея, която приложиме и по-горе – търсим приближеното решение $(\overline{x}, \overline{y})$ така, че

$$\Phi(\overline{x}, \overline{y}) = \sum e_i^2$$

да е минимално. Тук с e_i сме означили грешката, която се получава в i-тото уравнение, т.е. разликата между стойностите на лявата и дясната страна.

Получаваме

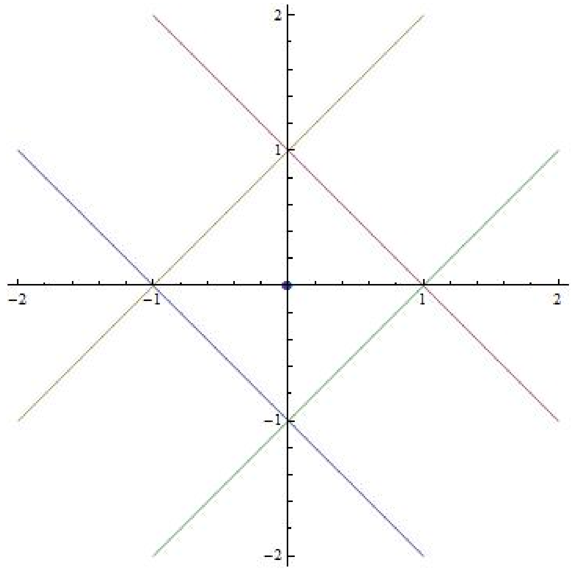
$$\Phi(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x} - \overline{y} - 1)^2 + (\overline{x} + \overline{y} - 1)^2 + (\overline{x} + \overline{y} + 1)^2 + (\overline{x} - \overline{y} + 1)^2$$

Необходимото условие да има функцията $\Phi(\overline{x}, \overline{y})$ минимум е

$$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{x}} = 0 \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{y}} = 0 \end{aligned}\right.$$

Решаваме тази система и получаваме окончателно $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0)$.

Нека видим геометричния смисъл на така полученото решение. Всяко едно от уравненията определя една права. Тогава търсим такава точка, която да е възможно най-близо до всички тези прави. Очевидно това е точно центърът на квадрата, заключен между правите:



□

Твърдение 1. *Нека търсим най-доброто решение $\overline{x}$ на преопределената система*

$$Ax = b.$$

Тогава $\overline{x}$ удовлетворява матричното уравнение

$$A^T A\overline{x} = A^T b$$

Да приложим това твърдение към системата от задача 7.

Задача 8. Да се реши преопределената система

$$\left| \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{array} \right. ,$$

като се използва Твърдение 1.

Решение. Решаваме задачата в Mathematica:

```
In[19]:= A = {{1, -1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, -1}};
         b = {{1}, {1}, {-1}, {-1}};
         x = Inverse[Transpose[A].A].Transpose[A].b

Out[21]= {{0}, {0}}
```

□

Библиография

[1] Боянов, Б.: Лекции по числени методи. Дарба, 2008

[2] Сборник по числени методи – http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/nummeth

[3] Сендов, Бл., Попов, В.: Числени методи. Първа част. Университетско издателство „Св.Климент Охридски", 1996

[4] Kiusalaas, J.: Numerical Methods in Engineering. Cambridge University Press, 2010

[5] Chapra, S.: Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists. McGraw Hill, 2012

[6] Бахвалов, Н.С., Лапин, А.В., Чижонков, Е.В.: Численные методы в задачах и упражнениях. Высшая школа, 2000

[7] Hollis, S: Manual for Stewart's Single Variable Calculus. Brooks/Cole, 2008

[8] Antia, H. M.: Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1991