3.2 Норма и разстояние

В предишния параграф разгледахме въпроса за намиране на функция, която минава "близо" до дадени точки, без задължително да минава през тях. За тази цел въведохме критерий, който да оценява количествено колко "близо" е дадена функция до точките. Изобщо казано, е необходимо да имаме начини да оценим колко "близо" са две функции една до друга. Две фундаментални понятия в математиката, които отговарят на тази необходимост, са понятията разстояние и норма.

Дефиниция 1. *Нека F е дадено линейно пространство. Казваме, че в F е въведена **норма**, ако на всеки елемент f от F е съпоставено число $\|f\|$ (наречено норма на f), като при това са удовлетворени условията*

1) $\|f\| \geq 0$ *(равенство се достига т.с.т.к. $f = 0$);*

2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|, \forall \lambda;$

3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in F.$

Дефиниция 2. *Нека F е дадено линейно пространство. Казваме, че в F е въведено **разстояние**, ако на всеки два елемента $f, g \in F$ съпоставяме число $\rho(f, g)$, което удовлетворява следните изисквания:*

1) $\rho(f, g) \geq 0$*, като равенство се достига т.с.т.к. $f = g$;*

2) $\rho(f, g) = \rho(g, f);$

3) $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g), \forall f, g, h \in F.$

Забележка. Понятията норма и разстояние са естествени обобщения съответно на разстоянието на дадена точка от нулата и разстоянието между две точки в геометричния смисъл.

Забележка. Всяка норма поражда разстояние. Т.е. ако имаме нормата $\|.\|$ в F, то можем да дефинираме разстояние между два елемента в F, като нормата на разликата им ($\|f - g\|$). Не е трудно да се провери, че така дефинираното разстояние удовлетворява условията от Дефиниция 2.

Ще разгледаме две често използвани на практика норми и породените от тях разстояния.

Дефиниция 3. *Нека разгледаме $C[a, b]$ – множеството от всички непрекъснати в интервала $[a, b]$ функции. В него дефинираме **равномерна норма** по следния начин:*

$$\|f\|_{C[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

*Тя поражда **равномерното разстояние**:*

$$\rho(f, g) := \|f - g\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Забележка. Тъй като функциите f и g са непрекъснати, то според Теоремата на Вайерщрас в затворения интервал $[a, b]$ максимумът се достига.

Задача 1. Да се намерят равномерните норми в интервала $[0,1]$ на функциите $f(x) = x$ и $g(x) = x^2$ и равномерното разстояние между тях в същия интервал.

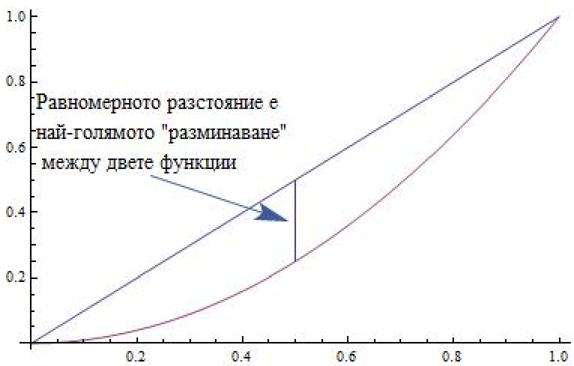
Решение. Прилагаме дефиницията

$$\|f\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |x| = 1$$
$$\|g\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |x^2| = 1$$

Равномерното разстояние между двете функции е

$$\|f - g\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |x - x^2| = \frac{1}{4}.$$

Да отбележим, че последният екстремум се достига при $x = \frac{1}{2}$ (върхът на параболата). Геометричният смисъл на равномерното разстояние между $f(x)$ и $g(x)$ е илюстриран на следващата фигура. Това е най-голямата (по абсолютна стойност) разлика между стойностите на двете функции в интервала.



□

Дефиниция 4. *Разглеждаме пространството $L_2[a,b]$ от всички функции с интегруем квадрат в интервала $[a,b]$. В него въвеждаме нормата*

$$\|f\|_{L_2[a,b]} := \left\{ \int_a^b \mu(x) f^2(x) dx \right\}^{1/2}.$$

Ще я наричаме ***средноквадратична норма*** *с тегло $\mu(x)$ в интервала $[a,b]$.*

Тя поражда ***средноквадратично разстояние****:*

$$\rho(f,g) := \|f - g\|_{L_2[a,b]} = \left\{ \int_a^b \mu(x)(f(x) - g(x))^2 dx \right\}^{1/2}$$

Забележка. Дължината на вектора $\overline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ в $\mathbb{R}^n$ е

$$|\overline{x}| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$$

(по-точно Евклидовата му норма). Тогава средноквадратичното разстояние се явява аналог на дължината на вектора, където сумата е заменена с интеграл.

Задача 2. Да се намери средноквадратичното разстояние с тегло $\mu(x) = 1$ между функциите $f(x) = x$ и $g(x) = x^2$ в интервала $[0, 1]$.

Решение.

$$\|f - g\|_{L_2[0,1]} = \left\{ \int_0^1 (x - x^2)^2 dx \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx \right\}^{1/2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{x^3}{3} - 2.\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{30}}$$

□

Забележка. Ако сравним средноквадратичното разстояние между $f(x)$ и $g(x)$ в дадения интервал с равномерното разстояние между същите функции, което намерихме в Задача 1, ще видим, че средноквадратичното разстояние е по-малко. Това, разбира се, е естествено, тъй като равномерното разстояние дава максимума на разликата между двете функции, докато средноквадратичното в някакъв смисъл усреднява разликите във всички точки.

Да разгледаме отново зад. **??**, в която приближихме функцията на Рунге с полиноми от 4-та и 10-та степен. Гледайки графиките, интуитивно казахме, че приближението с полинома от 10-та степен е "по-лошо". Сега обаче имаме средство, с помощта на което можем да сравним приближението в двата случая.

Задача 3. Дадена е функцията

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Тя е апроксимирана с полиномите

$$p_4(x) = 1 - 4.22719x^2 + 3.31565x^4$$

и

$$p_{10}(x) = 1 - 16.8552x^2 + 123.36x^4 - 381.434x^6 + 494.91x^8 - 220.942x^{10}.$$

Да се намерят и сравнят равномерните и средноквадратичните разстояния в интервала $[-1, 1]$ между f и двата полинома.

Решение. Да намерим първо равномерните разстояния в двата случая:

```
In[11]:= f[x_] := 1/(1 + 25 x^2)
         p4[x_] := 1 - 4.27719 x^2 + 3.31565 x^4
         p10[x_] := 1 - 16.8552 x^2 + 123.36 x^4 - 381.434 x^6 + 494.91 x^8 - 220.942 x^10
In[5]:=  Maximize[{Abs[f[x] - p4[x]], -1 ≤ x ≤ 1}, x]
Out[5]=  {0.438357, {x → -0.79475}}
In[6]:=  Maximize[{Abs[f[x] - p10[x]], -1 ≤ x ≤ 1}, x]
Out[6]=  {1.91566, {x → -0.940219}}
```

И така, равномерните разстояния са съответно $\|f - p_4\|_{C[-1,1]} = 0.438357$ и $\|f - p_{10}\|_{C[-1,1]} = 1.91566$. Второто е значително по-голямо. Разбира се, до този извод бихме могли да стигнем и гледайки графиките на полиномите и функцията в двата случая, тъй като равномерното разстояние е най-голямата грешка, взета по абсолютна стойност, в дадения интервал.

Да сравним сега средноквадратичните разстояния, които вземат предвид грешките, получени при апроксимацията във всяка точка от интервала.

```
In[14]:= Sqrt[Integrate[(f[x] - p4[x])^2, {x, -1, 1}]]
Out[14]= 0.394831
In[15]:= Sqrt[Integrate[(f[x] - p10[x])^2, {x, -1, 1}]]
Out[15]= 0.820905
```

Виждаме, че и в този случай разстоянието е по-голямо при полинома от десета степен. □

Средноквадратичното разстояние (както и кое да е друго разстояние) ни дава критерий за това колко "близо" са две функции една до друга. Нека е дадена функцията f. Можем да използваме този критерий, за да намерим функция от определен клас, например алгебричен полином, която да приближава f възможно най-добре (т.е. да е възможно "най-близо") в смисъла на този критерий. Да разгледаме следния пример.

Задача 4. Да се намери полиномът на най-добро средноквадратично приближение от втора степен в интервала $[0, 1.5]$ за функцията $f(x) = e^x$ при тегло $\mu(x) = 1$.

Решение. Търсим полинома във вида $g(x) = ax^2 + bx + c$. Искаме да определим коефициентите така, че средноквадратичното разстояние между f и g да е възможно най-малко. Имаме

$$\|f - g\|_{L_2[0,1]} = \left\{ \int_0^{1.5} (f(x) - g(x))^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Искаме това разстояние да е минимално и следователно търсим минимума на

$$\Phi(a, b, c) = \int_0^{1.5} (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Условията за това са

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{array} \right. .$$

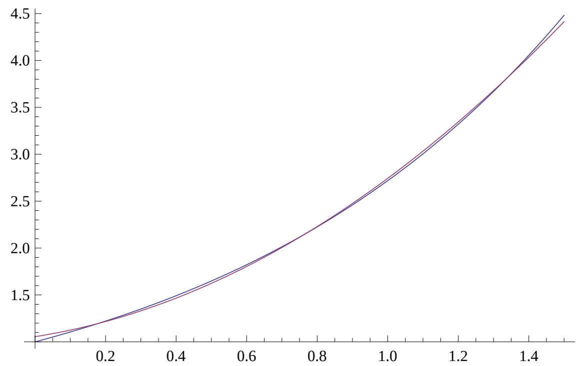
Решаваме тази система с Mathematica:

```
In[35]:= f[x_] := E^x
         p[x_] := a x^2 + b x + c
         Φ[a_, b_, c_] := Integrate[(f[x] - p[x])^2, {x, 0, 1.5}]
         coeffs = NSolve[∂_a Φ[a, b, c] == 0 && ∂_b Φ[a, b, c] == 0 && ∂_c Φ[a, b, c] == 0, {a, b, c}]
Out[38]= {{a → 1.1017, b → 0.58595, c → 1.05539}}
```

Тогава полиномът на най-добро средноквадратично приближение е

$$g(x) \approx 1.1017x^2 + 0.58595x + 1.05539.$$

На следващата фигура апроксимацията е илюстрирана геометрично:



Библиография

[1] Боянов, Б.: Лекции по числени методи. Дарба, 2008

[2] Сборник по числени методи – http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/nummeth

[3] Сендов, Бл., Попов, В.: Числени методи. Първа част. Университетско издателство „Св.Климент Охридски", 1996

[4] Kiusalaas, J.: Numerical Methods in Engineering. Cambridge University Press, 2010

[5] Chapra, S.: Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists. McGraw Hill, 2012

[6] Бахвалов, Н.С., Лапин, А.В., Чижонков, Е.В.: Численные методы в задачах и упражнениях. Высшая школа, 2000

[7] Hollis, S: Manual for Stewart's Single Variable Calculus. Brooks/Cole, 2008

[8] Antia, H. M.: Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1991