Глава 4

Приближения в линейни нормирани пространства.

4.1 Интерполационни квадратурни формули

Важен клас от числени методи са тези за приближено намиране на определени интеграли. Ясно е, че голяма част от интегралите не могат да бъдат решени точно. Ето защо от изключителна важност е да се намерят начини, по които стойността на съответните интеграли да може да се намира с достатъчно добра точност.

Първият начин, който ще разгледаме са т.нар. интерполационни квадратурни формули:

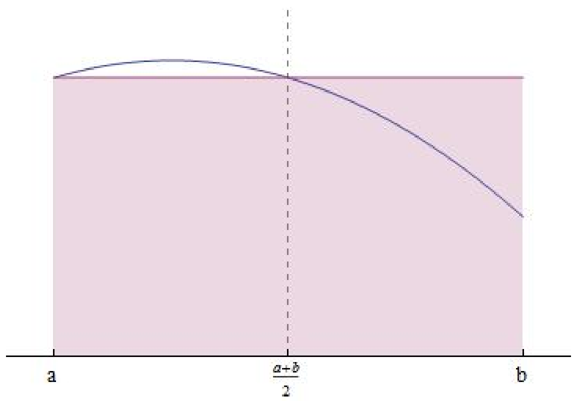
- **Квадратурна формула на правоъгълниците**

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Грешката при приближаване е

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3, \quad \xi \in (a,b)$$

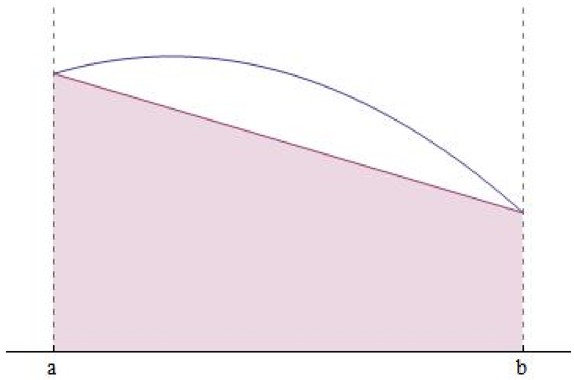
Геометричният смисъл на тази формула е следният – вместо лицето на криволинейния трапец, заключен под графиката на функцията $f(x)$, намираме лицето на правоъгълника със страни $b-a$ и $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.



- **Квадратурна формула на трапеците**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$



- **Квадратурна формула на Симпсън**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$R(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5$$

Ще изведем квадратурната формула на трапеците, за да покажем как става това. За другите формули нещата стоят по подобен начин.

Търсим приближение за

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Тогава можем да заместим функцията $f(x)$ с интерполационния ѝ полином от степен 1 за възлите $x_0 = a$ и $x_1 = b$ и тогава ще имаме

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(f;x)dx.$$

Получаваме

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b L_1(f;x)dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}.f(b) + \frac{x-b}{a-b}.f(a)\right)dx \\
&= \frac{f(b)}{b-a}\left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b - \frac{f(a)}{b-a}\left.\frac{(x-b)^2}{2}\right|_a^b \\
&= \frac{f(b)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{f(a)}{b-a}.\frac{(b-a)^2}{2} \\
&= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).
\end{aligned}$$

Аналогично могат да се изведат и формулите на правоъгълниците и Симпсън, като функцията $f(x)$ се апроксимира съответно с $L_0(f;x)$ във възела $x_0 = \frac{a+b}{2}$ и $L_2(f;x)$ във възлите $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$.

Задача 1. Да се намери приближено стойността на

$$I = \int_{0.5}^{1} x^6 dx$$

и да се даде оценка на грешката (по абсолютна стойност) R, като се използва формулата на:

а) правоъгълниците;

б) трапеците;

в) Симпсън.

Да се сравни с точната стойност $\frac{127}{896} \approx 0.141741$.

Решение. Да означим $f(x) := x^6$. Във всеки от трите случая първо ще дадем оценка на грешката, а след това и ще намерим съответните приближения на I. Имаме:

а) За грешката имаме

$$R = \left| \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \right| = \frac{30\,|\xi^4|}{24}.0.5^3 \leq \frac{30}{24}.0.125 = 0.15625$$

При оценяването на грешката използвахме, че $\xi \in (0.5, 1)$. Сега получаваме

$$I \approx 0.5 f(0.75) \approx 0.0889893.$$

Действителната грешка е приблизително 0.05, което е в съответствие с оценката, която дадохме.

б) За оценка на грешката получаваме

$$R = \left| -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \right| = \frac{30\,|\xi^4|}{12}.0.5^3 \leq \frac{30}{12}.0.125 = 0.3125.$$

За приближението получаваме

$$I \approx 0.5 \frac{f(0.5) + f(1)}{2} \approx 0.253906.$$

Действителната грешка е приблизително 0.11.

в) За оценката на грешката имаме

$$R = \left| -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5 \right| = \frac{360\,|\xi^2|}{2880}.0.5^5 \leq \frac{360}{2880}.0.03125 = 0.00390625.$$

$$I \approx \frac{0.5}{6}(f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)) \approx 0.143962$$

В действителност грешката е приблизително 0.0022.

$\square$

Обикновено, с цел да се постигне по-добра точност, се използват т.нар. съставни квадратурни формули. Нека търсим приближение за

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Разделяме интервала $[a, b]$ на n равни подинтервала с дължина $h = \frac{b-a}{n}$. Нека вземем точките $\{x_i = a + ih\}_{i=0}^n$. Тогава

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

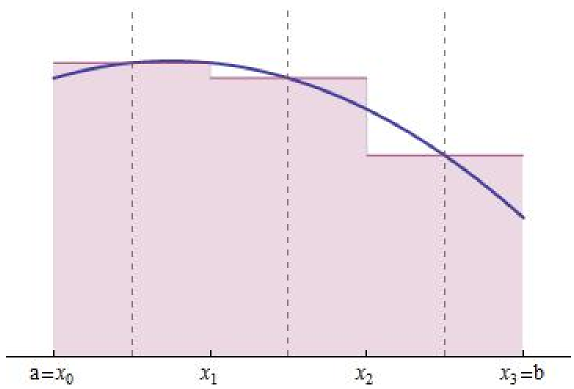
Сега, прилагайки към всеки от подинтервалите една от квадратурните формули (на правоъгълниците, на трапеците, на Симпсън), получаваме съответно:

- **Съставна квадратурна формула на правоъгълниците**

$$I(f) \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

За грешката може да се покаже, че

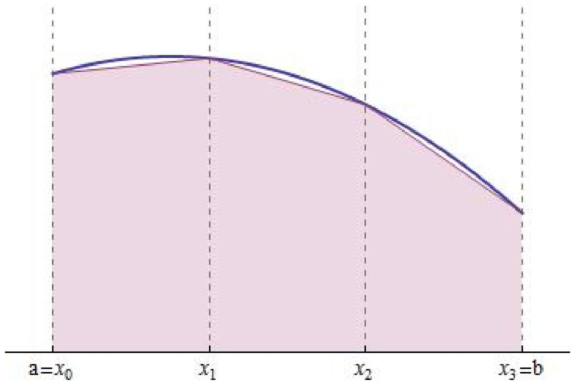
$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi).$$



- **Съставна квадратурна формула на трапеците**

$$I(f) \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$



- **Съставна квадратурна формула на Симпсън**

$$I(f) = \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2} \right) + f(x_i) \right]$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\xi)$$

Задача 2. Да се намери n така, че n-тата съставна квадратурна формула на правоъгълниците (трапеците, Симпсън) да приближава

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

с грешка, не по-голяма от $\epsilon = 0.00001$. Да се намери това приближение.

Решение. а) По формулата на правоъгълниците имаме за представянето на грешката

$$R_{rect} = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{24n^2}.$$

Диференцираме $f(x)$ и получаваме

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$f''(x)$ е намаляваща (и положителна) в интервала $[0, 1]$ (проверете, че $f'''(x) < 0$ в този интервал) и тогава достига максималната си по модул стойност в този интервал за $x = 0$. Тогава

$$R_{rect} = \frac{2}{24n^2(1+\xi)^3} \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Искаме грешката да е по-малка от ϵ и тогава

$$\frac{1}{12n^2} \leq 10^{-5} \Longleftrightarrow n^2 \geq \frac{10^5}{12}$$

Следователно n трябва да е поне 92. Обърнете внимание, че това е най-малката стойност на n, която гарантира грешка, по-малка от ϵ. Възможно е достатъчно добро приближение да се получи и за значително по-малки стойности на n.

Сега да намерим самото приближение за I.

```
In[1]:= f[x_] := 1/(1 + x)
h = 1. / 92;
nodes = Table[i h, {i, 0, 92}];
i = 1/92 Sum[f[(nodes[[i - 1]] + nodes[[i]])/2], {i, 2, 93}]
Out[4]= 0.693143
```

Ако сравним така намереното приближение с това, което дава Mathematica като резултат (0.693147), ще видим, че резултатът е действително точен до петия знак след десетичната запетая.

б) Приближението по формулата на трапеците можете да направите самостоятелно за упражнение.

в) $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(1+x)^5}$. Тогава за представянето на грешката, използвайки формулата на Симпсън, имаме

$$R_{simp} \leq \frac{24}{2880n^4} \Longrightarrow \frac{24}{2880n^4} \leq 10^{-5},$$

т.е. $n \geq 6$. Намираме приближената стойност за I:

```
f[x_] := 1/(1 + x)
h = 1. / 6;
nodes = Table[j h, {j, 0, 6}];
i = 1/(6 * 6) Sum[(f[nodes[[j - 1]]] +
      4 f[(nodes[[j - 1]] + nodes[[j]])/2] + f[nodes[[j]]]), {j, 2, 7}]
Out[16]= 0.693149
```

□

Практически метод за приближено пресмятане на интеграли с определена точност(Не е правено на упражнения)

На практика в много случаи е невъзможно (или много трудно) да се даде оценка на грешката, използвайки формулата, както направихме в задача 2. Тогава може да се използва следната идея. Нека търсим приближена стойност на интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

с точност, не по-лоша от някакво отнапред зададено ϵ. Ще използваме например съставната квадратурна формула на Симпсън. Последователно намираме приближения по формулата, като разделяме интервала $[a, b]$ на $2, 3, \dots$ подинтервала. Правим това, докато две последователни приближения, които сме намерили, се различават помежду си с не повече от ϵ. Тогава можем да считаме, че сме намерили I с близка до желаната точност. Нека дадем пример, като разгледаме отново същия интеграл, както и в задача 2.

Задача 3. Като използвате описания по-горе метод, намерете приближено стойността на

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Алгоритъмът да приключва, когато разликата между приближенията в две съседни итерации стане по-малка от 10^{-10} или докато броят на итерациите стане 1000.

Решение. Ще реализираме описания по-горе алгоритъм в Mathematica:

```
ϵ = 10^-10;
f[x_] := 1/(1 + x)
n = 2;
h = 1/n;
Do[x_i = i h, {i, 0, n}];
IApprox_1 = 1/(6 * n) Sum[(f[x_(j-1)] + 4 f[(x_(j-1) + x_j)/2] + f[x_j]), {j, 1, n}] // N;

Do[
 n++;
 h = 1/n;
 Do[x_i = i h, {i, 0, n}];
 IApprox_2 = 1/(6 * n) Sum[(f[x_(j-1)] + 4 f[(x_(j-1) + x_j)/2] + f[x_j]), {j, 1, n}];
 If [Abs[IApprox_1 - IApprox_2] < ϵ, Break[]];
 IApprox_1 = IApprox_2
 , {1000}
]
Print["I≈", N[IApprox_2, 10]]
Print["Iterations:", n]
```

```
I≈0.6931471814
Iterations:39
```

□

За упражнение можете да реализирате този алгоритъм за формулите на правоъгълниците и трапеците. Направете числени експерименти и сравнете броя итерации, необходими при всяка от формулите, за да се постигне желаната точност.

Да обърнем внимание, че разгледаната идея може да се използва за широк клас задачи, а не само за приближеното пресмятане на интеграли (например по формулата на Нютон можем да построяваме полиноми с нарастващи степени, докато приближението на функция в дадена точка стане достатъчно добро).

Библиография

[1] Боянов, Б.: Лекции по числени методи. Дарба, 2008

[2] Сборник по числени методи – http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/nummeth

[3] Сендов, Бл., Попов, В.: Числени методи. Първа част. Университетско издателство „Св.Климент Охридски", 1996

[4] Kiusalaas, J.: Numerical Methods in Engineering. Cambridge University Press, 2010

[5] Chapra, S.: Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists. McGraw Hill, 2012

[6] Бахвалов, Н.С., Лапин, А.В., Чижонков, Е.В.: Численные методы в задачах и упражнениях. Высшая школа, 2000

[7] Hollis, S: Manual for Stewart's Single Variable Calculus. Brooks/Cole, 2008

[8] Antia, H. M.: Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1991