ТЕМА 7: КОМБИНАТОРИКА
Принцип за Включване и Изключване

Формулировка 1: Дадена е фамилията от множества $\{A_i | A_i \subseteq A, i \in I_n\}$. Тогава

$$|\overline{A}_1^A \cap \overline{A}_2^A \cap ... \cap \overline{A}_n^A| = |A| - \sum_{i \in I_n} |A_i| + \sum_{i<j \in I_n} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

Формулировка 2: Дадено е множество A и n брой свойства $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$, проверими за всеки един от неговите елементи. Нека с $N(s_{i_1}, s_{i_2}, ..., s_{i_k})$ да означим броя на елементите, които притежават свойствата $s_{i_1}, s_{i_2}, ..., s_{i_k}$, а с $N(\overline{s}_{i_1}, \overline{s}_{i_2}, ..., \overline{s}_{i_k})$ – броя на тези елементи, които не притежават свойствата $s_{i_1}, s_{i_2}, ..., s_{i_k}$. Тогава

$$N(\overline{s_1}, \overline{s_2}, ..., \overline{s_n}) = |A| - \sum_{i \in I_n} N(s_i) + \sum_{i<j \in I_n} N(s_i, s_j) - ... + (-1)^n N(s_1, s_2, ..., s_n)$$

Задачи за упражнение:

Задача 1: В група студенти всеки човек знае поне един от езиците за програмиране Java, C и Pascal. Известно е, че 15 души знаят Java, 13 души знаят C и 10 човека знаят Pascal. C и Java знаят 5 човека, C и Pascal също 5, а Java и Pascal - 3. Трима души знаят и трите езика за програмиране. От колко души се състои групата?

Решение: Означаваме с J множеството от студентите, знаещи Java, с C множеството на тези, знаещи C, с P множеството на знаещите Pascal, с JC знаещите Java и C, с JP знаещите Java и Pascal, с CP знаещите C и Pascal, с JCP знаещите три езика, а с X – броя на всички студенти. Прилагането на Принципа за включване и изключване ни дава следното равенство:

$|\overline{J} \cap \overline{C} \cap \overline{P}| = X - (|J| + |C| + |P|) + (|J \cap C| + |J \cap P| + |C \cap P|) - |J \cap C \cap P|$

От ляво на равенството стои броят на хората, които не знаят нито един език за програмиране, по условие 0.

$0 = X - (15 + 13 + 10) + (5 + 5 + 3) - 3$

$X = 28$

Задача 2: Колко са числата от 1 до 100, които не се делят на нито едно от числата $2, 3, 5$ и 7?

Решение:

Нека $x \in I_{100}$, да означим с $\alpha_k, k \in \{2, 3, 5, 7\}$ свойството $k|x$.

Търсим броя на числата, които не притежават нито едно от свойствата $\alpha_k, k \in \{2, 3, 5, 7\}$.

$$\begin{aligned} N(\overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3, \overline{\alpha}_5, \overline{\alpha}_7) = {} & |I_{100}| - (N(\alpha_2) + N(\alpha_3) + N(\alpha_5) + N(\alpha_7)) + \\ & (N(\alpha_2, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_5) + N(\alpha_2, \alpha_7) + N(\alpha_3, \alpha_5) + N(\alpha_3, \alpha_7) + N(\alpha_5, \alpha_7)) - \\ & (N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) + N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_7) + N(\alpha_2, \alpha_5, \alpha_7) + N(\alpha_3, \alpha_5, \alpha_7)) + \\ & N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7) = \\ & 100 - (50 + 33 + 20 + 14) + (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) - (3 + 2 + 1 + 0) - 0 = 22 \end{aligned}$$

Задача 3: Дадени са множествата $|A| = n$ и $|B| = m$. Какъв е броят на функциите $f : A \to B$, които са сюрекции?

<u>*Решение:*</u> Ще приложим принципа за включване/изключване.

Нека $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$

Да въведем следните означения:

$F = \{f : A \to B\}$

$F' = \{f \in F | \forall b \in B (\exists a \in A (f(a) = b))\}$

$F_i = \{f \in F | \forall a \in A (f(a) \neq b_i)\}$

Броят на функциите, които търсим е:

$$|F'| = |F| - \sum_{i \in I_m} F_i + \sum_{i<j \in I_m} F_i \cap F_j - ... + (-1)^m F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_m =$$
$$m^n - \tbinom{m}{1}(m-1)^n + \tbinom{m}{2}(m-2)^n - ... + (-1)^m (m-m)^n =$$
$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

Задача 4: Колко са пермутациите на n елемента, в които никой елемент не е на мястото си?

<u>*Решение:*</u> Нека $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ е множеството, чиито елементи участват в пермутациите. Да означим с P множеството на всички пермутации, а с P_i - множеството на тези от тях, в които елементът a_i е на мястото си.

Пермутациите, които търсим са елементи на множеството $\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap ... \cap \overline{P_n}$, чиято мощност ще определим с принципа за включване и изключване.

$$|\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap ... \cap \overline{P_n}| = |P| - \sum_{i \in I_n} |P_i| + \sum_{i<j \in I_n} |P_i \cap P_j| + ... + (-1)^n |P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n| =$$
$$n! - \tbinom{n}{1}(n-1)! + \tbinom{n}{2}(n-2)! ... + (-1)^n \tbinom{n}{n} 0! =$$
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tbinom{n}{i} (n-i)!$$

Задача 5: Колко са пермутациите на n елемента, в които точно r елемента са на местата си?

<u>*Упътване:*</u> Тази задача можем да разбием на две подзадачи: първата се състои в определяне кои точно r елемента остават на местата си, след което решаваме познатата задача за пермутиране на останалите елементи така, че никой да не е на мястото си.

Задача 6: Дадена е фамилията от множества $\{A_i, i \in I_n\}$. Да се докаже, че:

$$|\bigcup_{i \in I_n} A_i| = \sum_{i \in I_n} |A_i| - \sum_{i<j \in I_n} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

<u>*Решение:*</u> Твърдението на задачата можем да изведем от принципа за включване и изключване по следния начин:

Да положим $A = \bigcup_{i \in I_n} A_i$ и да приложим принципа за включване и изключване за фамилията $\{A_i | A_i \subseteq A, i \in I_n\}$.

Така ще получим

$|\overline{A}_1^A \cap \overline{A}_2^A \cap ... \cap \overline{A}_n^A| = |A| - \sum\limits_{i \in I_n} |A_i| + \sum\limits_{i<j \in I_n} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$

Но по дефиниция на множеството A

$\overline{A}_1^A \cap \overline{A}_2^A \cap ... \cap \overline{A}_n^A = \emptyset \quad \Rightarrow$

$0 = |A| - \sum\limits_{i \in I_n} |A_i| + \sum\limits_{i<j \in I_n} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| \quad \Rightarrow$

$|A| = \sum\limits_{i \in I_n} |A_i| - \sum\limits_{i<j \in I_n} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| \quad \Rightarrow$

$|\bigcup\limits_{i \in I_n} A_i| = \sum\limits_{i \in I_n} |A_i| - \sum\limits_{i<j \in I_n} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$

Задача 7: Колко са думите с дължина l над азбука $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, в които участват всички букви?

<u>*Решение:*</u> Тази задача се свежда до задачата за намиране броя на функциите - сюрекции от вида $f : I_l \to A$, а те са:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^l$$

Задача 8: Колко са n-значните десетични числа, в чийто запис участват всички десетични цифри?

<u>*Упътване:*</u> Десетичните записи на числата са думи над азбуката $C = \{'0', '1', ..., '9'\}$. Да означим с X^n множеството, чиято мощност търсим, а с $X_i^n, i \in \{'1', '2', ..., '9'\}$ да означим множеството на тези числа от X^n, които започват с цифра i.

Фамилията $\{X_i^n | X_i^n \subseteq X^n, i \in \{'1', ..., '9'\}\}$ е разбиване на X^n, защото

$X^n = \bigcup\limits_{i='1'}^{'9'} X_i^n$ и $X_i^n \cap X_j^n = \emptyset, i \neq j$.

Задача 9: По колко начина можем да изберем 5 карти от колода карти така, че в извадката да има карти от четирите бои.

<u>*Решение:*</u> Да означим с A_i извадките, в които липсва цвят i. Техният брой е съответно $|A_i| = \binom{52-13}{5}, i \in I_4$

Следват бройките на извадки в които липсват 2 цвята: $|A_i \cap A_j| = \binom{52-26}{5}$; или 3 цвята: $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{52-39}{5}$.

А броят на извадките, в които липсват четирите цвята, разбира се, е нула.

И така търсеният брой е:

$$X = \binom{52}{5} - \binom{4}{1}\binom{39}{5} + \binom{4}{2}\binom{26}{5} - \binom{4}{3}\binom{13}{5} = 685464$$

Задача 10: Колко са думите над азбуката $\{a, b, c\}$, които съдържат по две букви от всеки вид и в които няма еднакви съседни букви?

Решение: Да означим с P множеството на всички думи над азбуката $\{a, b, c\}$, които съдържат по две букви от всеки вид. Техният брой е: $\frac{6!}{(2!)^3}$

Въвеждаме следните означения за подмножества на P :

A - думите, в които буквите a са съседни;

B - думите, в които буквите b са съседни;

C - думите, в които буквите c са съседни.

Множеството, което ни интересува е $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ и за намиране на броя на неговите елементи ще приложем принципа за включване и изключване:

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |P| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C| = \frac{6!}{(2!)^3} - 3\frac{5!}{(2!)^2} + 3\frac{4!}{2!} - 3! = 30$$

Задача 11: Край кръгла маса трябва да се настанят n двойки враждуващи рицари, така че никои двама, които враждуват да не са съседни. По колко начина може да стане това?

Упътване: Тук можем да приложим подхода от 10 задача. Но за разлика от предишната задача двамата във всяка двойка са различни, т.е. те могат да се подредят по два начина.

Задача 12: Дадено е следното уравнение:

$x_1 + x_2 + x_3 = 57$

Да се намери броят на решенията, отговарящи на следните условия:

a) $x_i \in \mathbb{N}, i \in I_3$

b) $x_i \in \mathbb{N}^+, x_1 > 3, x_2 \geq 2$

c) $x_i \in \mathbb{N}, x_1 \leq 19, x_2 \leq 20, x_3 \leq 17$

Задача 13: Всяко квадратче на мрежа $n \times n$ се оцветява в един от k цвята. Да се намери:

a) Броят на оцветяванията на квадратчетата от контура (първия и последния ред и първия и последния стълб) на мрежата с използване на два цвята;

b) Броят на оцветяванията на квадратчетата, непринадлежащи на контура на мрежата;

c) Броят на оцветяванията на квадратчетата, непринадлежащи на контура на мрежата, такива че всеки цвят се среща поне веднъж;

d) Броят на оцветяванията на мрежата, такива че контурът ѝ е двуцветен, а в останалата част от нея всеки цвят се среща поне веднъж.

Задачи

Задача 1: Нека $\{a_k\}$ е редица от различни естествени числа с дължина n^2+1. Да се докаже, че тя съдържа монотонна подредица с дължина най-малко $n+1$.

Задача 2: Келнер подготвя 3 маси за банкет и трябва да ги зареди с 4 вида питиета, като от всяко питие са му дадени по 10 бутилки. Той набързо нарежда бутилките, без да следи къде по колко от всеки вид бутилки слага. Сигурно ли е, че както и да е разпределил питетата, то ще има маса, на която са поставени поне по 4 бутилки от два вида питиета?

Задача 3: На витрината на сладкарница са изложени 6 вида сладки, наредени в 5 подноса, като от всеки вид има по 11 сладки. Докажете, че както и да се подреждат сладките в подносите, винаги ще има поднос, който съдържа поне по три сладки от поне два от шестте вида.

Задача 4: Даден е равностранен триъгълник със страна 2. Да се докаже, че както и да се изберат 5 точки от триъгълника, ще има 2 от тях, които са на разстояние не повече от 1.

Задача 5: Картина от n различни фигури се оцветява, като за всяка фигура се използва един от k различни цвята. Определете:

a) За какви стойности на k е сигурно, че както и да се оцвети картината, поне един цвят ще е използван за поне четири фигури;

b) При колко от различните оцветявания на картината, всеки цвят е използван поне веднъж;

c) По колко начина може да се оцвети картината в два различни цвята c_1 и c_i, $i \in [2;k]$ така, че за всяко от тези оцветявания цвят c_1 е използван за m фигури, а цвят c_i е използван за останалите фигури.

Задача 6: В кутия има пет еднакви бели топки, 7 еднакви зелени топки и десет червени топки, надписани с числата от 1 до 10. От кутията се изваждат 12 топки. В колко от възможните извадки:

a) има точно 5 червени топки;

b) няма червена топка;

c) има бяла топка, зелена топка и поне 6 червени топки.

Задача 7: Около кръгла маса седят 12 философи. Пред всеки от тях има чиния, между всеки две чинии има вилица, в средата на масата има купа спагети. Животът на философите минава така: всеки от тях мисли, огладнява, храни се и пак мисли. За да се нахрани със спагетите са му нужни вилиците от двете старни на чинията пред него, а това значи, че двама съседи не могат да се хранят едновременно. Намерете максималния брой философи, които могат да се хранят едновременно и - ако този брой е k, то колко са $i, i \in I_k$ - елементните множества от философи, които могат да се хранят едновременно.

Задача 8: На парти са събрани n човека. Да се докаже, че във всички случаи между тях ще има двама души, които имат равен брой познати.

Задача 9: По колко начина числото $n \in \mathbb{N}^+$ може да се представи като:

a) Сума на точно k естествени числа;

$$\text{Отговор: } S_k^n = C_{n+k-1}^n = \binom{n+k-1}{n}$$

b) Сума на положителни естествени числа.

$$\text{Отговор: } \sum_{k=1}^{n} S_k^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} S_{i+1}^{n-i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{n-i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} = 2^{n-1}$$

И в двата случая редът на събираемите е от значение.

Задача 10: Да се докаже, че ако се изберат произволно 5 точки с целочислени координати в равнината, то измежду тях ще се намерят две такива, че средата на отсечката с краища тези точки е точка с целочислени координати.

Задача 11: По колко начина n различни топки могат да се поставят в k различни кутии? Посочете решавана задача, до която може да се сведе тази.

Задача 12: По колко начина n неразличими топки могат да се поставят в k различни кутии? Посочете решавана задача, до която може да се сведе тази.

Задача 13: По колко начина n различни топки могат да се поставят в k неразличими кутии?

Задача 14: По колко начина n неразличими топки могат да се поставят в k неразличими кутии?

Задача 15: По колко начина могат да се разполжат 8 топа на шахматната дъска така, че да не се стрелят един друг?

Задача 16: По колко начина могат да се разполжат 8 царици на шахматната дъска така, че да не се застрашават една друга?