Зад. 1 Нека $f(n)$, $g(n)$ и $h(n)$ са произволни асимптотично положителни функции, такива че $f(n) = \Theta(g(n))$ и $h(n) = \Theta(g(n))$. Докажете или опровергайте всяко от следните твърдения:

1. $\sqrt{f(n)h(n)} = \Theta(g(n))$
2. $\sqrt[3]{(f(n))^2 + (h(n))^2} = \Theta(g(n))$

Решение Първото твърдение е вярно. Прилагайки дефиницията на $\Theta()$ към условието, имаме

$$\exists c_1 > 0\, \exists c_2 > 0\, \exists n_1 > 0\, \forall n \geq n_1\, (c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n))$$
$$\exists c_3 > 0\, \exists c_4 > 0\, \exists n_2 > 0\, \forall n \geq n_2\, (c_3 g(n) \leq h(n) \leq c_4 g(n))$$

Нека $n' = \max\{n_1, n_2\}$. За всяко n, такова че $n \geq n'$,

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$
$$c_3 g(n) \leq h(n) \leq c_4 g(n)$$

Умножавайки неравенствата, получаваме

$$c_1 c_3 (g(n))^2 \leq f(n)h(n) \leq c_2 c_4 (g(n))^2$$

Тъй като в разглеждания домейн функциите са положителни, можем да коренуваме и получаваме

$$\sqrt{c_1 c_3 (g(n))^2} \leq \sqrt{f(n)h(n)} \leq \sqrt{c_2 c_4 (g(n))^2} \Leftrightarrow \sqrt{c_1 c_3}\, g(n) \leq \sqrt{f(n)h(n)} \leq \sqrt{c_2 c_4}\, g(n)$$

Следователно, съществуват константи c' и c'', а именно $c' = \sqrt{c_1 c_3}$ и $c'' = \sqrt{c_2 c_4}$ и стойност на аргумента $n' = \max\{n_1, n_2\}$, такива че за всяко $n \geq n'$:

$$c' g(n) \leq \sqrt{f(n)h(n)} \leq c'' g(n)$$

Прилагаме дефиницията на $\Theta()$ и виждаме, че първото твърдение е вярно.

Второто твърдение е лъжа. Достатъчно е да посочим един контрапример. За контрапример може да използваме $f(n) = n$, $g(n) = n$ и $h(n) = n$. Очевидно $f(n) = \Theta(g(n))$ и $h(n) = \Theta(g(n))$, но

$$\sqrt[3]{(f(n))^2 + (h(n))^2} = \sqrt[3]{2n^2} = \sqrt[3]{2}\, n^{\frac{2}{3}} \notin \Theta(n)$$

□

Зад. 2 Подредете по асимптотично нарастване следните функции. Обосновете отговорите си кратко. Напишете в явен вид самата подредба.

$n!$,	$100n!$,	$n^2 2^n + n!$,	$(n!)^2$,
$\sum_{k=1}^{n} k!$,	$n^2 2^n$,	n^{12},	$\sqrt[n]{n!}$

Решение Тъй като функциите са осем на брой, ще извършим седем сравнения, с които ще установим окончателната наредба.

i $(n!)^2 \succ n!$, тъй като за всяка неограничено растяща функция $f(n)$, в сила е $(f(n))^2 \succ f(n)$. Последното се доказва тривиално, примерно с използване на анализ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(f(n))^2}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{1} = \infty$$

ii $n! \approx 100n!$. Следва тривиално от дефиницията на $\Theta()$ с двете константи равни на сто, и примерно $n_0 = 1$.

iii $n^2 2^n + n! \approx n!$. Ще покажем, че $n^2 2^n \prec n!$. Вземаме логаритъм от двете страни. Логаритъмът на лявата страна е

$$\lg n^2 2^n = 2 \lg n + n \lg 2 \approx n$$

Логаритъмът на дясната страна е

$$\lg n! = \approx n \lg n$$

Последният факт е извеждан на лекции. Тъй като $n \lg n \succ n$, тоест логаритъмът на дясната страна расте асимптотично по-бързо, следва, че дясната страна $n!$ расте по-бързо от лявата страна $n^2 2^n$.

След като изведем този факт, използваме наблюдението, че сума от положителни функции има асимптотиката на асимптотично най-бързо растящото събираемо, а именно $n!$.

iv $\sum_{k=1}^{n} k! \approx n!$, тоест сумата от факториелите има асимптотиката на най-старшото събираемо. Има различни начини да покажем това. Примерно:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k! = \\
&1! + 2! + 3! + \ldots (n-2)! + (n-1)! + n! = \\
&\frac{n!}{n(n-1)(n-2)\cdots 2} + \frac{n!}{n(n-1)(n-2)\cdots 3} + \frac{n!}{n(n-1)(n-2)\cdots 4} + \ldots + \frac{n!}{n} + \frac{n!}{1} = \\
&n! \underbrace{\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 2} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 3} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1} \right)}_{A}
\end{aligned} \tag{1}$$

Твърдим, че A е сума, ограничена от константа. Действително, нека запишем A в обратен ред

$$A = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 3} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdots 2}$$

и да я сравним със сумата

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

И двете суми имат n събираеми, като всяко събираемо на B е по-голямо или равно от съответното събираемо на A в реда, в който са написани. Известно е, че $B \leq 2$. Следователно, $A \leq 2$. Следователно, $1 \leq A \leq 2$. Замествайки в (1), получаваме $\sum_{k=1}^{n} \approx n!$.

Друг начин за извеждането на същия резултат е следният:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k! = \\
&\underbrace{1! + 2! + 3! + \ldots (n-2)! + (n-1)!}_{n-1 \text{ събираеми}} + n! < \\
&\underbrace{(n-1)! + (n-1)! + \ldots + (n-1)!}_{n-1 \text{ събираеми}} + n! = \\
&(n-1) \cdot (n-1)! + n! < \\
&n \cdot (n-1)! + n! = \\
&2(n!)
\end{aligned}$$

v $n! \succ n^2 2^n$. Вече изведохме този факт.

vi $n^2 2^n \succ n^{12}$. За да докажем това, достатъчно е да логаритмуваме двете страни. След логаритмуването, лявата страна има асимптотика $\Theta(n)$, а дясната, $\Theta(\lg n)$.

vii $n^{12} \succ \sqrt[n]{n!}$. За да докажем това, достатъчно е да съобразим, че $n^n > n!$ и че $\sqrt[n]{n^n} = n$ и че $n^{12} \succ n$.

Окончателната подредба е:

$$(n!)^2 \succ n! \approx 100n! \approx n^2 2^n + n! \approx \sum_{k=1}^{n} k! \succ n^2 2^n \succ n^{12} \succ \sqrt[n]{n!}$$

Зад. 3 Разгледайте следните два програмни фрагмента, написани на `C`. Докажете чрез инварианти, че всяка от функциите `sum1( )` и `sum2( )` връща сумата на елементите на масива $A[0, 1, \ldots, n-1]$:

```
int A[n];
int sum1(int n) {
  int i, s = 0;
  for(i = 0; i < n; i ++) {
      s += A[i]; }
  return s; }
```

```
int A[n];
int sum2(int n) {
  int i, s = 0;
  for(i = 0; i < n; i ++) {
    if (i%2 == 0) {
      s += A[ i/2 ]; }
    else {
      s += A[n - 1 - i/2]; } }
  return s; }
```

Имайте предвид, че целочисленото деление `i/2` връща $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.

Решение за `sum1( )`: Инварианта за `sum1( )`:

При всяко достигане на ред 4, $s = \sum_{j=0}^{i-1} A[j]$.

База При първото достигане на ред 4, $s = 0$ заради присвояването на ред 3. От друга страна, $\sum_{j=0}^{i-1} A[j] = 0$, защото $i = 0$, което на свой ред означава, че множеството $\{0, \ldots, i-1\}$ е празно, а сума, в която индексната променлива взема стойности от празното множество, е нула. ✓
Запазване Нека твърдението е вярно при някое достигане, което не е последното. Преди присвояването на ред 5, имаме $s = \sum_{j=0}^{i-1} A[j]$ от предположението. След присвояването на ред 5, имаме $s = \left(s = \sum_{j=0}^{i-1} A[j]\right) + A[i]$. При следващото достигане на ред 4, i се инкрементира с единица, което означава, че по отношение на новото i имаме $s = \sum_{j=0}^{i-1} A[j]$.
Терминация При последното достигане на ред 4, в сила е

$$i = n$$
$$s = \sum_{j=0}^{i-1} A[j]$$

Следователно, $s = \sum_{j=0}^{n-1} A[j]$.

Решение за `sum2( )`: Инварианта за `sum2( )`:

При всяко достигане на ред 4, $s = \displaystyle\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor}^{n-1} A[j]$.

База При първото достигане на ред 4, $s = 0$ заради присвояването на ред 3. От друга страна, $s = \displaystyle\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1}^{n-1} A[j] = 0 + 0 = 0$, защото $\left\lfloor \frac{0+1}{2} \right\rfloor = 0$ и $\left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor = 0$, което на свой ред означава, че множествата $\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor - 1\} = \{0, \ldots, -1\}$ и $\{n - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor, \ldots, n-1\} = \{n - 0, \ldots, n-1\}$ са празни. ✓
Запазване Нека твърдението е вярно при някое достигане, което не е последното.

Случай 1 i е четно. Условието на ред 5 е истина и изпълнението достига до ред 6. Преди присвояването на ред 6, имаме $s = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j]$ от предположението. След присвояването, имаме

$$\begin{aligned}
s &= \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \right) + A\left[\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right] \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + A\left[\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right] \right) + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \qquad (2)
\end{aligned}$$

Тъй като i е четно, $i+1$ е нечетно. Лесно се вижда, че $\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$, следователно израз (2) е еквивалентен на:

$$\left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1} A[j] + A\left[\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right] \right) + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] =$$

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(i+1)+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \qquad (3)$$

При следващото достигане на ред 4, i се инкрементира с единица. Очевидно, спрямо новата стойност на i, израз (3) е:

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} - 1 \rfloor} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j]$$

Виждаме, че инвариантата се запазва.

Случай 2 i е нечетно. Условието на ред 5 е лъжа и изпълнението достига до ред 8. Преди присвояването на ред 8, имаме $s = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j]$ от предположението. След присвояването, имаме

$$\begin{aligned}
s &= \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \right) + A\left[n - 1 - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right] \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \left(\left(\sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \right) + A\left[n - 1 - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right] \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-1-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \qquad (4)
\end{aligned}$$

При нечетно i, в сила е равенството $\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{i+2}{2} \rfloor$. Освен това, за всяко i е вярно, че $n - 1 - \lfloor \frac{i}{2} \rfloor = n - 1 + \lceil -\frac{i}{2} \rceil = n + \lceil -1 - \frac{i}{2} \rceil = n - \lfloor 1 + \frac{i}{2} \rfloor = n - \lfloor \frac{i+2}{2} \rfloor$. При нечетно i, последният израз е равен на $n - \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor$. Следователно израз (4) е еквивалентен на:

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(i+1)+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \qquad (5)$$

При следващото достигане на ред 4, i се инкрементира с единица. Очевидно, спрямо новата стойност на i, израз (5) е:

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} - 1 \rfloor} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j]$$

Виждаме, че инвариантата се запазва.
Терминация При последното достигане на ред 4, в сила е

$$i = n$$
$$s = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^{n-1} A[j]$$

Следователно,

$$s = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} A[j] + \sum_{j=n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} A[j] \tag{6}$$

Ще покажем, че $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1$ и $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ са съседни стойности, нарастващи в този ред, за всяко естествено n. Първо да допуснем, че е n е четно, тоест $n = 2k$ за някое естествено k. Тогава

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor - 1 = k - 1$$

а

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2k - \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = 2k - k = k$$

Сега да допуснем, че n е нечетно, тоест $n = 2k + 1$ за някое естествено k. Тогава

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{2k+2}{2} \right\rfloor - 1 = k + 1 - 1 = k$$

а

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2k + 1 - \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = 2k + 1 - \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = 2k + 1 - k = k + 1$$

Щом $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1$ и $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ са съседни стойности, нарастващи в този ред, то интервалите

$$\left[0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1\right] \text{ и } \left[n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \dots, n - 1\right]$$

са разбиване на интервала $[0, 1, \dots, n-1]$. Следователно, израз (6) е еквивалентен на

$$s = \sum_{j=0}^{n-1} A[j]$$

□

Зад. 4 Решете чрез развиване (итерация) следното рекурентно отношение

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$

Решение

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 \\
&= T\left(\frac{n}{16}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2 = \\
&= T\left(\frac{n}{64}\right) + \left(\frac{n}{16}\right)^2 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2 = \\
&= T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \frac{n^2}{16^2} + \frac{n^2}{16^1} + \frac{n^2}{16^0} = \\
&= T\left(\frac{n}{4^4}\right) + \frac{n^2}{16^3} + \frac{n^2}{16^2} + \frac{n^2}{16^1} + \frac{n^2}{16^0} = \\
&\dots \\
&= T\left(\frac{n}{4^k}\right) + \frac{n^2}{16^{k-1}} + \frac{n^2}{16^{k-2}} + \frac{n^2}{16^{k-3}} + \ldots + \frac{n^2}{16^0} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Очевидно $k_{max} = \log_4 n$. Тогава израз (7) е еквивалентен на

$$
\underbrace{T\left(\frac{n}{4^{\log_4 n}}\right)}_{T(1)} + \underbrace{\frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-1}} + \frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-2}} + \frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-3}} + \ldots + \frac{n^2}{16^0}}_{\log_4 n \text{ събираеми}} \qquad (8)
$$

Тъй като $T(1)$ е константа, асимптотиката на (8) се определя от сумата

$$
\begin{aligned}
&\frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-1}} + \frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-2}} + \frac{n^2}{16^{(\log_4 n)-3}} + \ldots + \frac{n^2}{16^0} = \\
&n^2 \underbrace{\left(\frac{1}{16^{(\log_4 n)-1}} + \frac{1}{16^{(\log_4 n)-2}} + \frac{1}{16^{(\log_4 n)-3}} + \ldots + \frac{1}{16^0}\right)}_{A} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Тривиално се показва, че редът $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}$ е сходящ, следователно сумата A е ограничена от константа, следователно асимптотиката на (9) е $\Theta(n^2)$. Следователно, $T(n) = \Theta(n^2)$. □

Зад. 5 Докажете по индукция, че следното рекурентното отношение има решение $T(n) = \Theta\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$:

$$
T(n) = \frac{3}{2}T(n-1) + 2
$$

Решение, част i Опитваме да покажем, че $T(n) = O\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$, тоест

$$
\exists c > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n \geq n_0 : T(n) \leq c\left(\frac{3}{2}\right)^n
$$

Индукционното предположение е, че

$$
T(n-1) \leq c\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}
$$

От дефиницията на $T(n)$ и индукционното предположение следва, че

$$
T(n) \leq \frac{3}{2}\left(c\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right) + 2 = c\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2
$$

Тъй като полученият израз не е по-малък или равен от $c\left(\frac{3}{2}\right)^n$, налага се да засилим индукционното предположение. Ще покажем, че

$$
\exists c > 0\ \exists b, 1 < b < \frac{3}{2},\ \exists n_0 > 0\ \forall n \geq n_0 : T(n) \leq c\left(\frac{3}{2}\right)^n - b
$$

Индукционното предположение е, че

$$T(n-1) \leq c\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - b$$

От дефиницията на $T(n)$ и индукционното предположение следва, че

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \frac{3}{2}\left(c\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - b\right) + 2 = \\ &= c\left(\frac{3}{2}\right)^{n} - \frac{3b}{2} + 2 \end{aligned}$$

Очевидно

$$c\left(\frac{3}{2}\right)^{n} - \frac{3b}{2} + 2 \leq c\left(\frac{3}{2}\right)^{n} - b \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq \frac{3b}{2} - b \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq b$$

Решение, част ii Ще покажем, че $T(n) = \Omega\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$, тоест

$$\exists c > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n \geq n_0 : T(n) \geq c\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$$

Индукционното предположение е, че

$$T(n-1) \geq c\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

От дефиницията на $T(n)$ и индукционното предположение следва, че

$$T(n) \geq \frac{3}{2}\left(c\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right) + 2 = c\left(\frac{3}{2}\right)^{n} + 2 \geq c\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$$

□

Зад. 6 Даден е пет елементен масив $A[]$, такъв че $\forall i, 1 \leq i \leq 5 : A[i] \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Известно е, че елементите на $A[]$ са два по два различни. Кои са възможните стойности на $A[]$, за които изучаваната функция Build Heap($A[]$) превръща масива в $[5, 3, 4, 1, 2]$?

Решение Ето псевдокода на Build Heap($A[]$):

```
Build Heap(A[1, 2, ..., n]: array of integers)
    for i ← ⌊n/2⌋ downto 1
        Heapify(A[], i)
```

В случая n е 5, следователно Build Heap($A[]$) извиква Heapify( ) точно $\left\lfloor\frac{5}{2}\right\rfloor = 2$ пъти. Последното извикване е Heapify($A[], 1$). Кои елементи от $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ могат да бъдат на първа позиция в масива, така че след привършването на Heapify($A[], 1$) да имаме масив $[5, 3, 4, 1, 2]$? Отговор: всеки елемент би могъл да бъде на първа позиция тогава. Ето защо.

Случай i $A[1] = 5$ преди извикването на Heapify($A[], 1$). Тогава $A[]$ трябва да бъде $[5, 3, 4, 1, 2]$ преди извикването на Heapify($A[], 1$), тъй като Heapify($A[], 1$) няма да промени нищо когато $A[1] > A[2]$ и $A[1] > A[3]$.

Какви са възможностите за масива $A[]$ при предпоследното, тоест първото, извикване на Heapify( ), а именно Heapify($A[], 2$)? Очевидно елементът със стойност 5 е на първа позиция, така че Heapify($A[], 2$) изобщо "не вижда" петицата. Ако някой от $A[2]$, $A[4]$ или $A[5]$ е равен на 4, то няма как четворката да се озове на позиция 3 след края на Heapify($A[], 2$). Значи, 4 е на позиция 3 и 5 е на позиция 1 преди викането на Heapify($A[], 2$). Останалите елементи, а именно 1, 2 и 3, могат да стоят на позиции 2, 4 и 5 по $3! = 6$ начина. От тези шест пермутации, три, а именно

53412, 51432, 52413

водят до желаната крайна пермутация $[5, 3, 4, 1, 2]$. Останалите три, а именно

53421, 51423, 52431

водят до крайна пермутация $[5, 3, 4, 2, 1]$. Да резюмираме: има три възможни начални стойности на $A[]$, а именно $[5, 3, 4, 1, 2]$, $[5, 1, 4, 3, 2]$ и $[5, 2, 4, 3, 1]$, за които Heapify($A[], 2$) прави масива $[5, 3, 4, 1, 2]$. Това са трите отговора в **Случай i**.

Случай ii $A[1] = 4$ преди извикването на Heapify($A[], 1$). Единствената възможност за $A[]$ в този момент е $[4, 3, 5, 1, 2]$ – очевидно петицата трябва да е на позиция 2 или позиция 3, но ако е на позиция 2, четворката ще отиде на позиция 2 в изпълнението на Heapify($A[], 1$); тройката е на позиция 2 понеже $A[2, 4, 5]$ е пирамида, а единицата и двойката са така разположени, защото в обратния случай бихме имали $[5, 3, 4, 2, 1]$ накрая.

Изведохме, че масивът е $[4, 3, 5, 1, 2]$ след края на Heapify($A[], 2$). Тогава преди началото на Heapify($A[], 2$), има точно три възможни пермутации на единицата, двойката и тройката (на позиции 2, 4 и 5), а именно

43512 41532 42513

Другите три пермутации, а именно

43521 41523 42531

биха довели до $[4, 5, 3, 2, 1]$ в края на Heapify($A[], 2$). Да резюмираме: в **Случай ii**, възможните начални стойности на масива са $[4, 3, 5, 1, 2]$, $[4, 1, 5, 3, 2]$ и $[4, 2, 5, 1, 3]$.

Случай iii $A[1] = 3$ преди извикването на Heapify($A[], 1$). Единствената възможност за масива в този момент е $[3, 5, 4, 1, 2]$ – петицата трябва да е на позиции 2 или 3, но ако е на 3, четворката няма как да отиде на позиция 3 накрая; тъй като $A[2, 4, 5]$ е пирамида, то петицата е на върха ѝ, значи на позиция 2; ако единицата и двойката са разположени обратно, никога няма да получим $A[4] = 1$ накрая.

Изведохме, че масивът е $[3, 5, 4, 1, 2]$ след края на Heapify($A[], 2$). Тогава преди началото на Heapify($A[], 2$), има точно три възможни пермутации на единицата, двойката и петицата (на позиции 2, 4 и 5), а именно

35412 31452 32415

Другите три пермутации, а именно

35421 31452 32415

биха довели до $[3, 5, 4, 2, 1]$ в края на Heapify($A[], 2$). Да резюмираме: в **Случай iii**, възможните начални стойности на масива са $[3, 5, 4, 1, 2]$, $[3, 1, 4, 5, 2]$ и $[3, 2, 4, 1, 2]$.

Случай iv $A[1] = 2$ преди извикването на Heapify($A[], 1$). Единствената възможност за масива в този момент е $[2, 5, 4, 1, 3]$ – петицата трябва да е на позиции 2 или 3, но ако е на 3, четворката няма как да отиде на позиция 3 накрая; тъй като $A[2, 4, 5]$ е пирамида, то петицата е на върха ѝ, значи на позиция 2; ако единицата и тройката са разположени обратно, никога няма да получим $A[4] = 1$ накрая.

Изведохме, че масивът е $[2, 5, 4, 1, 3]$ след края на Heapify($A[], 2$). Тогава преди началото на Heapify($A[], 2$), има точно три възможни пермутации на единицата, тройката и петицата (на позиции 2, 4 и 5), а именно

25413 21453 23415

Другите три пермутации, а именно

25431 21435 23451

биха довели до $[2,5,4,3,1]$ в края на HEAPIFY$(A[\,],2)$. Да резюмираме: в **Случай iv**, възможните начални стойности на масива са $[2,5,4,1,3]$, $[2,1,4,5,3]$ и $[2,3,4,5,1]$.

Случай v $A[1] = 1$ преди извикването на HEAPIFY$(A[\,],1)$. Единствената възможност за масива в този момент е $[1,5,4,3,2]$ – петицата трябва да е на позиции 2 или 3, но ако е на 3, четворката няма как да отиде на позиция 3 накрая; тъй като $A[2,4,5]$ е пирамида, то петицата е на върха ѝ, значи на позиция 2; ако двойката и тройката са разположени обратно, никога няма да получим $A[5] = 2$ накрая.

Изведохме, че масивът е $[1,5,4,3,2]$ след края на HEAPIFY$(A[\,],2)$. Тогава преди началото на HEAPIFY$(A[\,],2)$, има точно три възможни пермутации на двойката, тройката и петицата (на позиции 2, 4 и 5), а именно

15432 12435 13452

Другите три пермутации, а именно

15423 12453 13425

биха довели до $[1,5,4,2,3]$ в края на HEAPIFY$(A[\,],2)$. Да резюмираме: в **Случай v**, възможните начални стойности на масива са $[1,5,4,3,2]$, $[1,2,4,3,5]$ и $[1,3,4,5,2]$. $\square$