Примерни решения на домашно №1 на КН2, 28 ноември 2020 г.

Задача 1: Определете дали следното съждение е тавтология, условност или противоречие, използвайки еквивалентни преобразувания:

$$((p \to q) \to (q \to p)) \leftrightarrow (q \to p)$$

Еквивалентните преобразувания, които имате право да ползвате наготово, са свойствата на логическите съюзи, които разгледахме в първата лекция.

Решение: Да разгледаме лявата страна $\boxed{((p \to q) \to (q \to p))}$. Съгласно свойството на импликацията:

$((p \to q) \to (q \to p)) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \equiv$ // закон на De M., асоц., комут.
$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee p \vee \neg q \equiv$ // закон за двойното отрицание
$(p \wedge \neg q) \vee p \vee \neg q \equiv$ // асоциативност, комутативност
$(p \vee (p \wedge \neg q)) \vee \neg q \equiv$ // закон за поглъщането
$p \vee \neg q \equiv$ // комутативност
$\neg q \vee p$ // свойство на импликацията
$q \to p$

Показахме, че лявата страна е еквивалентна на дясната. Следователно, съждението е тавтология.

20 т. **Задача 2:** Използвайки комбинаторния принцип на включването и изключването, намерете формула за броя на покриванията на n-елементно множество, където $n \in \mathbb{N}^+$. Обосновете добре формулата – решения без обосновка няма да се признават.

1 т. Колко покривания има $\{a, b\}$?
1 т. Колко покривания има $\{a, b, c\}$?
1 т. Колко покривания има $\{a, b, c, d\}$?
2 т. Напишете в явен вид всички покривания на $\{a, b\}$.

Решение: За определеност, нека името на множеството е A. Дадено е, че $|A| = n$ и $n \geq 1$. Знаем от лекции, че $|2^A| = 2^n$. Оттук следва, че броят на всички фамилии над A—"фамилия над A" е подмножество на 2^A—е точно 2^{2^n}. Покриванията обаче не може да съдържат празното множество, а знаем, че $\emptyset \in 2^A$. Очевидно е, че $|2^A \setminus \emptyset| = 2^n - 1$.

И така, универсумът за целите на тази задача е $U = 2^{2^A \setminus \emptyset}$, като $|U| = 2^{2^n - 1}$. Забележете, че универсумът съдържа празната фамилия $\{\,\}$, тоест празното множество; това, което универсумът не може да съдържа, е, примерно, $\{\{\,\}\} = \{\emptyset\}$.

Естествено, не всеки елемент-фамилия на U представлява покриване. Припомняме си, че "покриване" е фамилия, която 1) не съдържа празното множество и 2) всеки елемент на опорното множество се съдържа в поне един неин елемент; в този смисъл тя **покрива** опорното множество. От мощността на универсума ще извадим броя на фамилиите, които не покриват опорното множество, съгласно комбинаторния принцип на включването и изключването.

Да кажем, че $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Нека X_i е множеството от фамилиите от U, които не покриват a_i, за произволно $i \in \{1, \ldots, n\}$; с други думи, които не съдържат елемент-множество, съдържащ a_i. В сила е

$$|X_i| = 2^{2^{n-1}-1}$$

по съображения, които са напълно аналогични на съображенията, по които изведохме $|U| = 2^{2^n-1}$ горе. Този резултат остава в сила дори при $n = 1$: тогава дясната страна е 1, което е коректно, понеже фамилията, непокриваща единствения елемент a_1, е $\{\}$.

Аналогично, нека $X_{i,j}$ е множеството от фамилиите от U, които не покриват a_i и не покриват a_j, за някакви i и j, такива че $1 \le i < j \le n$. В сила е

$$|X_{i,j}| = 2^{2^{n-2}-1}$$

И изобщо, нека $X_{i_1,\ldots,i_k}$ е множеството от фамилиите от U, които не покриват a_{i_1}, $\ldots$, a_{i_k}, за някакви i_1, $\ldots$, i_k, такива че $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, където $1 \le k \le n$. В сила е

$$|X_{i_1,\ldots,i_k}| = 2^{2^{n-k}-1}$$

Принципът на включване и изключване казва, че търсеният отговор е

$$\sum_{0 \le k \le n} (-1)^k \binom{n}{k} |X_{i_1,\ldots,i_k}| = \sum_{0 \le k \le n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}-1}$$

където при $k = 0$ събираемото е $|U|$, а множителят $\binom{n}{k}$ е равен на броя на начините да изберем i_1, $\ldots$, i_k от $\{1, \ldots, n\}$.

Броят на покриванията при $n = 2, 3, 4$ може да се сметне с калкулатор от тази формула, а може да се сметне и с maple така:

```
> setcovers := n -> add((-1)^k * binomial(n,k) * 2^(2^(n-k)-1), k = 0 .. n );
                                                         (n - k)
                                  k                    (2        - 1)
                setcovers := n -> add((-1)  binomial(n, k) 2              , k = 0 .. n)
> for i from 2 to 4 do setcovers(i) od;
                                           5

                                          109

                                         32297
```

Редовете, започващи с “>”, са нашите команди, а след всяка команда следва “отговорът” на maple.

Във всеки случай, стойностите са съответно 5, 109 и 32 297.

Странична забележка: броят на покриванията расте много по-бързо от броя на разбиванията; сравнете 15, което е броят на разбиванията при $n = 4$, с 32 297.

Ето и петте покривания при $n = 2$, написани явно:

$\{\{a\}, \{b\}\}$
$\{\{a, b\}\}$
$\{\{a\}, \{a, b\}\}$
$\{\{b\}, \{a, b\}\}$
$\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Задача 3: Релация $R \subseteq A \times A$ се нарича *преднаредба*, ако е рефлексивна и транзитивна. Нека $R \subseteq A \times A$ е преднаредба. Дефинираме друга релация $Q \subseteq A \times A$ така:

$$aQb \leftrightarrow aRb \wedge bRa$$

5 т. Докажете, че Q е релация на еквивалентност.
Нека Y е множеството от класовете на еквивалентност на Q. Дефинираме релация $T \subseteq Y \times Y$ така:

$$\forall a, b \in Y \, (aTb \leftrightarrow \exists w \in a \, \exists z \in b : wRz)$$

20 т. Какъв вид релация е T: на еквивалентност, на частична наредба, или не е нито един от тези два вида? Обосновете добре отговорите си – отговори без обосновка не се приемат.

Решение: Ще докажем, че Q е рефлексивна. Но това следва директно от рефлексивността на R.

Ще докажем, че Q е симетрична, тоест, че за всеки два различни $a, b \in A$, ако aQb, то bQa. Нека a и b са произволни различни елементи на A. Допускаме, че aQb. По дефиницията на Q, това е същото като $aRb \wedge bRa$. Заради комутативността на конюнкцията, това е същото като $bRa \wedge aRb$. По дефиницията на Q, това е същото като bRq. Доказахме, че aQb влече bQa.

Ще докажем, че Q е транзитивна, тоест, че за всеки три елемента $a, b, c \in A$, ако aQb и bQc, то aQc. Нека a, b и c са произволни елементи на A. Допускаме, че aQb и bQc. По дефиницията на Q, това е същото като $aRb \wedge bRa \wedge bRc \wedge cRb$.

- Тогава е вярно, че $aRb \wedge bRc$. Но R е транзитивна, така че последното влече aRc.

- Освен това е вярно, че $cRb \wedge bRa$. Но R е транзитивна, така че последното влече cRa.

И така, допускайки aQb и bQc, изведохме aRc и cRa. Но по дефиницията на Q, това е същотото като aQc. С което доказахме и транзитивността на Q.

Щом Q е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност.

Релацията T е над декартовия квадрат от класовете на еквивалентност на Q. Ще докажем, че T е релация на частична наредба.

- Ще докажем, че T е рефлексивна. Това е същото като да докажем, че всеки клас на еквивалентност на Q е в релация T със себе си. Съгласно дефиницията на T, това е същото като да докажем, че във всеки клас на еквивалентност има елемент, който е в релация R с елемент от същия клас. Но това следва веднага от факта, че класовете на еквивалентност са непразни и от факта, че R е рефлексивна.

- Ще докажем, че T е антисиметрична. Това е същото като да докажем, че ако един клас на еквивалентност C на Q е в релация T с клас на еквивалентност D на Q и освен това D е в релация с C, то C и D съвпадат.

  Да допуснем противното: съществуват различни класове на еквивалентност C и D на Q, такива че CTD и DTC. Щом CTD, то има $a \in C$ и $b \in D$, такива че aRb. Щом DTC, то има $a' \in C$ и $b' \in D$, такива че $b'Ra'$.

  Но тогава за всеки $c \in C$ и всеки $d \in D$ е вярно, че cRd, понеже cRa (тъй като a и c са от един и същи клас на еквивалентност C), aRb (което вече видяхме) и bRd (тъй като b и d са от един и същи клас на еквивалентност D), и R е транзитивна. Също така е вярно, че dRc, понеже dRb' (тъй като d и b' са от един и същи клас на еквивалентност D), $b'Ra'$ (което вече видяхме) и $a'Rc$ (тъй като a' и c са от един и същи клас на еквивалентност C), и R е транзитивна.

  Щом cRd и dRc за произволни $c \in C$ и всеки $d \in D$, то C и D са подмножества на един и същи клас на еквивалентност и не може да се различни класове на еквивалентност. Това противоречи на направеното допускане, че C и D са различни класове на еквивалентност.

- Ще докажем, че T е транзитивна. Това е същото като да докажем, че за всички класове на еквивалентност B, C и D на Q, ако BTC и CTD, то BTD.

  Наистина, нека за произволни класове на еквивалентност B, C и D е вярно, че BTC и CTD. Тогава съществуват елементи $b, c, d \in A$, такива че $b \in B$, $c \in C$, $d \in D$, bRc и cRd. От транзитивността на R следва, че bRd. Тогава от дефиницията на T следва, че BTD.

Доказахме, че T е релация на частична наредба.

Задача 4: Първо ще дефинираме "композиция на функции". Нека X, Y и Z са множества. Нека $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Функцията $g \circ f : X \to Z$, дефинирана така:

$$\forall x \in X : (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

наричаме *композицията на g и f*. Внимание: в израза $\boxed{(g \circ f)(x)}$, името на функцията е $\boxed{g \circ f}$, така че $\boxed{(g \circ f)(x)}$ се чете като функцията $g \circ f$, приложена върху x.

5 т. Покажете, че композицията на функции е асоциативна.

Нека W е произволно множество и $h : W \to W$ е произволна. За всяко $n \in \mathbb{N}^+$ дефинираме, че

$$h^n = \begin{cases} h, & \text{ако } n = 1, \\ h \circ h^{n-1}, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

Изразът $\boxed{h^n}$ не означава познатото ни от училище повдигане на степен, а е начин за записване на $n-1$ кратна композиция на функцията h със себе си.

Нека U е произволен универсум и $A, B \subseteq U$ са произволни множества в него. Дефинираме $f : 2^U \to 2^U$ така:

$$\forall x \in 2^U : f(x) = A \cap (B \cup x)$$

20 т. Докажете, че $f^2 = f$.

Решение: Първо ще покажем, че композицията на функции е асоциативна. Това е същото като да покажем, че ако X, Y, W и Z са произволни домейни и $f : X \to Y$ и $g : Y \to W$ и $h : W \to Z$, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Но двете функции $(h \circ g) \circ f$ и $h \circ (g \circ f)$ имат един и същи домейн и един и същи кодомейн, така че, за да покажем, че са равни, достатъчно е да покажем, че за всеки $x \in X$:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

Разглеждаме произволен $x \in X$. Щом f, g и h са функции, съществува единствен $y \in Y$, такъв че $f(x) = y$, съществува единствен $w \in W$, такъв че $g(y) = w$ и съществува единствен $z \in Z$, такъв че $f(w) = z$. И така, щом веднъж изберем x, елементите y, w и z са уникално определени.

Очевидно $(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)))$ и това е елементът z. Но $((h \circ g) \circ f)(x)$ е композицията на $h \circ g$ и f. Очевидно $(h \circ g)(y) = z$, където $y = f(x)$, така че $((h \circ g) \circ f)(x)$ също е z. Доказахме, че композицията на функции е асоциативна.

Ще докажем, че $f^2 = f$, където $f : 2^U \to 2^U$ е дефинирана така:

$$\forall x \in 2^U : f(x) = A \cap (B \cup x)$$

за произволен универсум U и произволни негови подмножества A и B. Наистина,

$$\begin{aligned} &f^2(x) = f(A \cap (B \cup x)) = A \cap (B \cup (A \cap (B \cup x))) = \\ &A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup B \cup x)) = A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup x)) = \\ &(A \cap (B \cup A)) \cap (B \cup x) = A \cap (B \cup x) = f(x) \end{aligned}$$