ТЕМА 9: ГРАФИ

Дефиниции:

Краен ориентирен мултиграф
Краен ориентирен граф
Краен неориентиран граф
Краен неориентиран мултиграф
Съседни върхове
Съседни ребра
Степен на връх в неориентирен граф
  Изолиран връх
  Висящ връх
Входна и изходна степен на връх в ориентиран граф
Регулярен граф
Подграф на даден граф
Път в граф
Цикъл
  Ойлеров цикъл
  Хамилтонов цикъл
Свързан граф
Свързана компонента на граф
Силно свързан (слабо свързан) ориентиран мултиграф
Силно свързана компонента на ориентиран граф
Пълен граф
Допълнение на граф
Двуделен граф

Представяне на графи

Матрица на съседство
Матрица на инцидентност
Списък на съседи

Обхождане на графи

Обхождане в дълбочина
Обхождане в ширина

Задачи за упражнение:

Задача 1: Нека $G(V, E)$ е неориентиран мултиграф. Да се докаже, че:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

<u>*Решение:*</u> Горното равенство следва от факта, че при сумиране на степените всяко ребро се преброява два пъти, по веднъж за всеки от върховете – негови краища.

Задача 2: Да се докаже, че произволен неориентиран мултиграф има четен брой върхове от нечетна степен.

<u>*Решение:*</u> Съгласно *Задача 1* сумата от степените на всички върхове е четна, следователно сумата от нечетните степени също е четна, а от това следва, че броят на върховете с нечетна степен е четен.

Задача 3: Да се докаже, че за произволен ориентиран мултиграф е изпълнено:

$$\sum_{v \in V} d(v)^+ = \sum_{v \in V} d(v)^- = |E|$$

<u>*Решение:*</u> Аналогично на *Задача 1* всяко ориентирано ребро е включено веднъж в сумата $\sum_{v \in V} d(v)^+$ заради своето начало и втори път в сумата $\sum_{v \in V} d(v)^-$ заради своя край.

Задача 4: Да се докаже, че във всеки граф има поне два върха с равни степени.
<u>*Упътване:*</u> Приложете принципа на Дирихле.

Задача 5: Нека $G(V, E)$ е граф с n върха, в който никои две ребра нямат общ връх. Какъв е максималният брой ребра в графа?

Задача 6: Намерете броя на ориентираните графи с множество от върхове $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, такива, че между всеки два върха има най-много едно ребро.

Задача 7: Да се докаже, че ако $G(V, E)$ е свързан граф, то $|E| \geq |V| - 1$.
<u>*Упътване:*</u> Като използвате метода на математическата индукция докажете следното твърдение:

$$P(n): \ G \text{ свързан граф}, |V| = n \Rightarrow |E| \geq n - 1$$

Задача 8: Нека $G(V, E)$ е граф с n върха и минимална степен на върховете $d_{min} \geq \frac{n-1}{2}$. Да се докаже, че графът е свързан.

<u>*Решение:*</u> Допускаме противното, т.е. графът съдържа поне две свързани компоненти $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$. Тъй като $|V_1| + |V_2| \leq n$, то за не по-голямото от двете числа $|V_i|$ е вярно: $|V_i| \leq \lfloor n/2 \rfloor$. От тук можем да оценим максималната степен на връх в съответната свързана компонента G_i:

$$d_{max} \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1 \leq n/2 - 1 < \frac{n-1}{2}$$

което е в противоречие с условието на задачата. Следователно допускането, че графът е несвързан, е грешно.

Задача 9: Да се докаже, че ако графът $G(V, E)$ е несвързан, то неговото допълнение $\overline{G}$ е свързан граф.

Задача 10: Да се докаже, че ако графът $G(V, E)$ е с 6 върха, то той или допълнението му $\overline{G}$ съдържа триъгълник.

Упътване: Разгледайте пълния граф K_6 и ребрата му, оцветени в два цвята. Докажете, че има едноцветен триъгълник.

Задача 11: Да се докаже или опровергае твърдението, че граф с 6 върха и 11 ребра не може да има изолиран връх.

Решение: Да допуснем, че графът има изолиран връх. В този случай максималният брой ребра се постига, когато останалите 5 върха образуват пълен граф.

Този брой е: $|E_{max}| = \binom{5}{2} = 10$, което противоречи на условието.

Следователно допускането е грешно, така че граф с 6 върха и 11 ребра не може да има изолиран връх.

Задача 12: Нека е даден регулярен граф G от степен d. Да се докаже, че в графа има път с дължина d.

Задача 13: Да се докаже, че ако в графа $G(V, E)$ има точно два върха с нечетна степен, то между тях има път.

Задача 14: Нека $G(V, E)$ е свързан граф. Да се докаже, че всеки два максимални по дължина прости пътя имат общ връх.

Задача 15: Даден е граф $G(V, E)$. Реброто e се нарича мост в графа, ако при отстраняването му се увеличава броят на свързаните компоненти на графа. Докажете, че ако всички върхове на графа са от четна степен, то той не съдържа мост.

Задача 16: Нека $G(V, E)$ е граф с n върха и k свързани компоненти.

а) Да се намери минималният брой ребра в графа;

б) Да се намери максималният брой ребра в графа.

Упътване: Покажете, че максимумът на броя на ребрата при граф с n върха и k свързани компоненти се получава в случая, когато $k - 1$ от свързаните компоненти са изолирани върхове, а k–тата свързана компонента е пълен граф, съдържащ останалите $n - k + 1$ върха.

Следствие: Графът $G(V, E)$ е свързан, ако за броя на ребрата му е изпълнено:
$$|E| > \frac{(|V| - 1)(|V| - 2)}{2}$$

Задача 17: Да се докаже, че ако в свързан граф се отстрани ребро, принадлежащо на прост цикъл, то графът остава свързан.

Задача 18: Турнир е ориентиран граф $G(V, E)$, в който всеки два върха v_i и v_j са свързани точно с едно ребро - (v_i, v_j) или (v_j, v_i). Да се докаже, че във всеки турнир съществува прост път, който съдържа всички върхове на графа.

Упътване: Докажете твърдението с индукция по броя на върховете $|V| = n$.

Задача 19: Да се докаже, че всеки турнир $G(V, E)$ има водач – това е връх v_i такъв, че за всеки друг връх v_j е вярно $(v_i, v_j) \in E$ или съществува трети връх w такъв, че е изпълнено: $(v_i, w) \in E \wedge (w, v_j) \in E$.

Доказателство: Избираме връх с максимална изходна степен.

Нека $v_i \in V, d^-(v_i) = max_{v \in V} d^-(v)$. Ще докажем, че той е водач.

Разглеждаме следното разбиване на множеството на върховете: $V = V' \cup V''$

$V' = \{v \in V | (v_i, v) \in E\} \ \Rightarrow |V'| = d^-(v_i)$

$V'' = \{v \in V | (v, v_i) \in E\}$

$\forall v \in V'((v_i, v) \in E)$

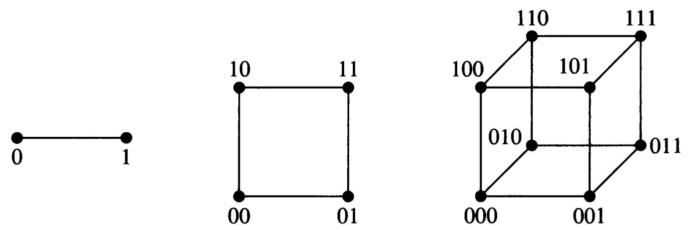
Нека $v \in V''$. Ще докажем, че $\exists w \in V'((w, v) \in E)$.

Да допуснем обратното: $\forall x \in V'((v, x) \in E) \ \Rightarrow d^-(v) \geq |V'| + 1$, което противоречи на факта, че максималната изходна степен на връх в G е $|V'|$.

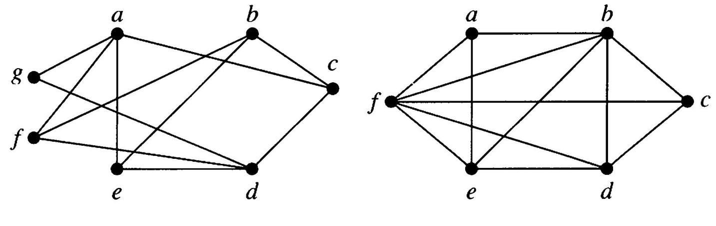
Следователно, допускането е погрешно, т.е. $\exists w \in V'((v_i, w) \in E \wedge (w, v) \in E)$, което искахме да докажем.

Задача 20: Да се докаже, че графът $G(V, E)$ е двуделен точно тогава, когато не съдържа цикъл с нечетна дължина.

Задача 21: Проверете кой от следните графи е двуделен и кой не е.



Фигура 1



G H

Фигура 2

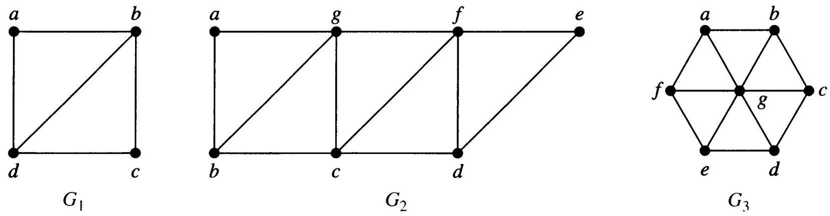
Ойлеров цикъл и Ойлеров граф В сила са следните твърдения:

Th: Графът има Ойлеров цикъл точно тогава, когато е свързан и всички степени на върховете му са четни.

Th: Ако графът има точно два върха с нечетни степени, то между тях има Ойлеров път.

Задача 22: Да се докаже, че ако в ориентирания граф $G(V, E)$, за всеки връх $v_i \in V$ е изпълнено $d^+(v_i) = d^-(v_i)$, то в графа има Ойлеров път.

Задача 23: Посочете кой от следнте графи е Ойлеров и кой не е



Фигура 3

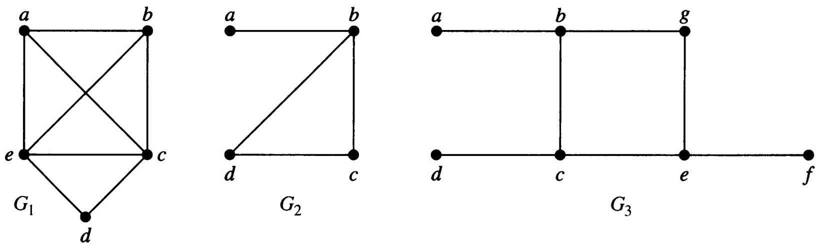
Хамилтонов цикъл и Хамилтонов граф В сила е следното твърдение:

Th(Ore): Ако за всяка двойка несъседни върхове v_i и v_j в неориентиран граф $G(V, E)$ е вярно: $d(v_i) + d(v_j) \geq n$, то G съдържа Хамилтонов цикъл.

Следствие 1: Всеки пълен граф е Хамилтонов.

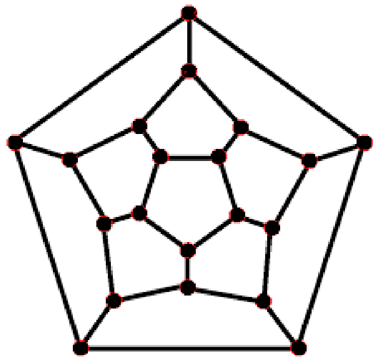
Следствие 2: Всеки регулярен граф от степен $d \geq \dfrac{n}{2}$ е Хамилтонов.

Задача 24: Посочете кой от следните графи е Хамилтонов и кой не е.



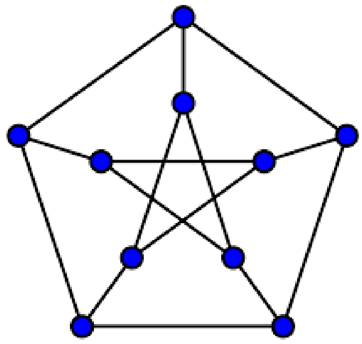
Фигура 4

Задача 25:. Да се докаже, че следният граф е Хамилтонов, като се намери номерация на върховете, съответна на Хамилтонов цикъл в графа.



Фигура 5

Задача 26:. Да се докаже, че графът на Petersen не съдържа Хамилтонов цикъл, но съдържа Хамилтонов път.



Фигура 6