2.11 Системата ZF

Формалната система ZF има един единствен нелогически символ $\in$ — двуместен предикатен.

ZF 1. (Аксиома за обемност)

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y.$$

От теоремата за равенството имаме

$$\vdash x = y \to \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

и следователно

$$\vdash_{ZF} x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y). \tag{1}$$

Интуитивно, две множества съвпадат тогава и само тогава, когато имат едни и същи елементи.

Забележка 1. Нека за произволна формула $\mathbf{A}$ с $\mathbf{D^A}$ означим формулата

$$\mathbf{D^A} \equiv \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A}),$$

където $\mathbf{y}$ не участва свободно в $\mathbf{A}$. Имаме

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{D^A} \to (\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A})}\text{(Т.Суб.)} \qquad \dfrac{}{\mathbf{D^A}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}'] \to (\mathbf{z} \in \mathbf{y}' \leftrightarrow \mathbf{A})}\text{(Т.Суб.)}}{(\mathbf{D^A} \mathbin{\&} \mathbf{D^A}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}']) \to (\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y}')}\text{(ТТ)}}{(\mathbf{D^A} \mathbin{\&} \mathbf{D^A}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}']) \to \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathbf{y}')}\text{(П}\forall\text{)}}{(\mathbf{D^A} \mathbin{\&} \mathbf{D^A}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}']) \to \mathbf{y} = \mathbf{y}'}\text{(ZF1), (ПЗ), (ТТ)}$$

и следователно, ако $\vdash_{ZF} \exists \mathbf{y}\mathbf{D^A}$, то можем да въведем функционален символ $\mathbf{f}$, чрез дефинираща аксиома $\mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A})$, където свободните променливи на $\mathbf{A}$ са измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}$.

Добавяме нов двуместен предикатен символ $\subseteq$ с дефинираща аксиома

$$x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y).$$

За произволни формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имаме

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \to \mathbf{A}}\text{(Т.Суб.), (ТТ)}}{\forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \to \forall \mathbf{x}\mathbf{A}}\text{(П}\forall\text{)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \to \mathbf{B}}\text{(Т.Суб.), (ТТ)}}{\forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \to \forall \mathbf{x}\mathbf{B}}\text{(П}\forall\text{)}}{\forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \to (\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \mathbin{\&} \forall \mathbf{x}\mathbf{B})}\text{(ТТ)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{A}}\text{(Т.Суб.)} \qquad \dfrac{}{\forall \mathbf{x}\mathbf{B} \to \mathbf{B}}\text{(Т.Суб.)}}{(\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \mathbin{\&} \forall \mathbf{x}\mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B})}\text{(ТТ)}}{(\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \mathbin{\&} \forall \mathbf{x}\mathbf{B}) \to \forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B})}\text{(П}\forall\text{)}}{\forall \mathbf{x}(\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{B}) \leftrightarrow (\forall \mathbf{x}\mathbf{A} \mathbin{\&} \forall \mathbf{x}\mathbf{B})}\text{(ТТ)}$$

В частност

$$\vdash_{ZF} \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow (\forall z(z \in x \to z \in y) \mathbin{\&} \forall z(z \in y \to z \in x)).$$

Оттук, дефиниращата аксиома на $\subseteq$, (1) и теоремата за еквивалентната замяна получаваме

$$\vdash_{ZF} x = y \leftrightarrow (x \subseteq y \mathbin{\&} y \subseteq x).$$

ZF 2. (Схема за отделянето (обхващането))

$$\exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow (\mathbf{z} \in \mathbf{x} \mathbin{\&} \mathbf{A})),\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ не участват свободно в } \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \text{ са различни.}$$

Забележка 2. Нека свободните променливи на $\mathbf{A}$ са измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}$. Нека $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ са различни константи и $\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Тогава

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow (\mathbf{z} \in \alpha \mathbin{\&} \mathbf{A}'))}\text{(ZF 2), (ПЗ)} \qquad \dfrac{\dfrac{(*)\ \forall \mathbf{z}(\mathbf{A}' \to \mathbf{z} \in \alpha)}{\mathbf{A}' \to \mathbf{z} \in \alpha}\text{(Т.Суб.), (ТТ)}}{(\mathbf{z} \in \alpha \mathbin{\&} \mathbf{A}') \leftrightarrow \mathbf{A}'}\text{(ТТ)}}{\exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A}')}\text{(ТЕЗ)}}{\forall \mathbf{z}(\mathbf{A}' \to \mathbf{z} \in \alpha) \to \exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A}')}\text{(ТД), (*)}}{\forall \mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{x}) \to \exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A})}\text{(ТК)}$$

$$\dfrac{\forall \mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{x}) \to \exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A})}{\exists \mathbf{x}\forall \mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{x}) \to \exists \mathbf{y}\forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A})}\text{(П}\exists\text{)}$$

Тогава, при означенията от предната забележка, имаме

$$\vdash_{ZF} \exists \mathbf{x}\forall \mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{x}) \to \exists \mathbf{y}\mathbf{D^A}$$

Така доказахме следната теорема

Теорема 2.31. Нека $\mathbf{A}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}$. Тогава, ако $\vdash_{ZF} \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{x})$, то в ZF можем да въведем нов n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ с дефинираща аксиома

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{A}).$$

.

Въвеждаме следните означения (съкращения):

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{a} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} & \equiv & \forall \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{A}) \\ \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \subseteq \mathbf{a} & \equiv & \forall \mathbf{z}(\mathbf{A} \to \mathbf{z} \in \mathbf{a}) \\ \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} & \equiv & \mathbf{y} = \mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{y} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\}. \end{array}$$

Забележка.Употребата на символа $=$ в рамките на съкращение по принцип не е добра практика, тъй като $=$ е логически символ, за който е валидна теоремата за равенството — доказуемо равни неща са взаимно заменяеми. В случая на горните съкращения тази теорема не е приложима в цялата си общност. Все пак имаме следните лесно установими свойства

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \to \mathbf{b} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \to \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ \mathbf{a} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \to \mathbf{a} = \{\mathbf{z}' \mid \mathbf{B}\} \to \forall \mathbf{z}''(\mathbf{A}_{\mathbf{z}}[\mathbf{z}''] \leftrightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{z}'}[\mathbf{z}'']), \quad \mathbf{z}'' \text{ не участва свободно в } \mathbf{A}, \mathbf{B} \\ \mathbf{a} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \to (\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \leftrightarrow \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\} \subseteq \mathbf{b}) \end{array}$$

Сега, теорема 2.42 може да се изкаже и по следния начин: Ако $\vdash_{ZF} \exists \mathbf{x}(\mathbf{z} \mid \mathbf{A} \subseteq \mathbf{x})$, то тогава $\vdash_{ZF} \exists \mathbf{y}(\mathbf{y} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\})$ и можем да въведем нов n-местен функционален символ f с дефинираща аксиома $\mathbf{f}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{A}\}$.

От аксиомата $x = x$ и правилото за замяната имаме $z = z$, откъдето, съгласно теоремата за тавтологиите) $z \neq z \to z \in x$ и следователно

$$\vdash_{ZF} \exists x \forall z(z \neq z \to z \in x),$$

т.е.

$$\vdash_{ZF} \exists x(\{z \mid z \neq z\} \subseteq x).$$

Въвеждаме нуламестен функционален символ $\emptyset$ с дефинираща аксиома

$$\emptyset = \{z \mid z \neq z\}.$$

Имаме $\vdash_{ZF} (z \in x \;\&\; z \in y) \to z \in x$, откъдето

$$\vdash_{ZF} \{z \mid z \in x \;\&\; z \in y\} \subseteq x$$

и значе

$$\vdash_{ZF} \exists x(\{z \mid z \in x \;\&\; z \in y\} \subseteq x)$$

Въвеждаме нов двуместен функционален символ $\cap$ с дефинираща аксиома

$$x \cap y = \{z \mid z \in x \;\&\; z \in y\}.$$

Аналогично въвеждаме нов двуместен функционален символ $\setminus$ с дефинираща аксиома

$$x \setminus y = \{z \mid z \in x \;\&\; z \notin y\}.$$

ZF 3. (Аксиома за чифта)

$$\exists x'(\{z \mid z = x \vee z = y\} \subseteq x').$$

Въвеждаме нов двуместен функционален символ $\{\cdot, \cdot\}$ (чифт) с дефинираща аксиома

$$\{x, y\} = \{z \mid z = x \vee z = y\}.$$

Чрез операцията чифт въвеждаме едноместната операция $\{\cdot\}$ (синглетон) и двуместната операция $(\cdot, \cdot)$ (наредена двойка) с дефиниращи аксиоми

$$\begin{array}{rcl} \{x\} & = & \{x, x\}, \\ (x, y) & = & \{\{x\}, \{x, y\}\}. \end{array}$$

ZF 4. (Аксиома за обединението)

$$\exists x'(\{z \mid \exists y(z \in y \mathbin{\&} y \in x)\} \subseteq x')$$

Въвеждаме нов едноместен функционален символ $\bigcup$ с дефинираща аксиома

$$\bigcup x = \{z \mid \exists y(z \in y \mathbin{\&} y \in x)\}.$$

Чрез $\bigcup$ и операцията чифт въвеждаме нов двуместен функционален символ $\cup$ (обединение на две множества) с дефинираща аксиома

$$x \cup y = \bigcup\{x, y\}.$$

Чрез $\cup$ и операцията синглетон въвеждаме нов едноместен функционален символ S (наследник) с дефинираща аксиома

$$Sx = x \cup \{x\}.$$

ZF 4. (Аксиома за безкрайността)

$$\exists x(\emptyset \in x \mathbin{\&} \forall y(y \in x \to Sy \in x)).$$

Нека с $\mathbf{A}$ означим формулата $\emptyset \in x \mathbin{\&} \forall y(y \in x \to Sy \in x)$. Тогава аксиомата за безкрайността казва, че $\exists \mathbf{x}\mathbf{A}$. Оттук лесно се устовява, че

$$\exists x(\{z \mid \forall x(\mathbf{A} \to z \in x\} \subseteq x).$$

Въвеждаме нов нуламестен функционален символ ω с дефинираща аксиома

$$\omega = \{z \mid \forall x(\mathbf{A} \to z \in x)\}.$$

От дефиницията следва, че

$$\vdash_{ZF} \mathbf{A} \to \omega \subseteq x,$$
$$\vdash_{ZF} \mathbf{A}_x[\omega].$$

Така ω е най-малкото (по отношение на $\subseteq$) множество, което съсържа $\emptyset$ и е затворено относно операцията S. ω наричаме множество на естествените числа, а елементите му — естествени числа.

ZF 5. (Аксиома за подмножествата)

$$\exists x'(\{z \mid z \subseteq x\} \subseteq x').$$

Въвеждаме нов едноместен функционален символ $\mathcal{P}$ с дефинираща аксиома

$$\mathcal{P}x = \{z \mid z \subseteq x\}.$$

Въвеждаме нов едноместен функционален символ $\mathcal{P}$ с дефинираща аксиома

$$\mathcal{P}x = \{z \mid z \subseteq x\}.$$

ZF 6. (Схема за замяната)

$$\forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \forall \mathbf{y} \forall \mathbf{y}'((\mathbf{A} \mathbin{\&} \mathbf{A}_{\mathbf{y}}[\mathbf{y}']) \to \mathbf{y} = \mathbf{y}') \to \forall \mathbf{z} \exists \mathbf{z}' \forall \mathbf{x}_1 \ldots \forall \mathbf{x}_n \forall \mathbf{y}(\mathop{\&}_{1 \le i \le n} \mathbf{x}_i \in \mathbf{z} \to \mathbf{A} \to \mathbf{y} \in \mathbf{z}'),$$

където $\mathbf{A}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$.

За всеки терм $\mathbf{a}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ и всяка формула $\mathbf{A}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ ще пишем

$$\{\mathbf{a} \mid \mathbf{A}\}$$

вместо

$$\{\mathbf{z} \mid \exists \mathbf{x}_1 \ldots \exists \mathbf{x}_n(\mathbf{z} = \mathbf{a} \mathbin{\&} \mathbf{A})\}$$

При горните означения, ако $\vdash_{ZF} \exists \mathbf{x}(\mathbf{A} \to \mathop{\&}_{1 \le i \le n} \mathbf{x}_i \in \mathbf{x})$, то от схемата за замяната следва, че

$$\vdash_{ZF} \exists \mathbf{x}'\{\mathbf{a} \mid \mathbf{A}\} \subseteq \mathbf{x}',$$

което ни позволява да дефинираме нов m-местен функционален символ $\mathbf{f}$ чрез дефинираща аксиома

$$\mathbf{f}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_m = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{A}\}.$$

Например, въвеждаме двуместния функционален символ $\times$ (декартово произведение) с дефинираща аксиома

$$x \times y = \{(x', y') \mid x' \in x \mathbin{\&} y' \in y\}.$$

2.12 Робинсонова аритметика

Робинсовата аритметика е формалната система PA^-, която има нелогически символи 0 (нуламестен функционален), S (едноместен функционален), $+$, . (двуместни функционални) и $<$ (двуместен предикатен), и слидните девет конкретни нелогически аксиоми

N1. $0 \neq Sx$;

N2. $Sx = Sy \to x = y$;

N3. $x + 0 = x$;

N4. $x + Sy = S(x + y)$;

N5. $x.0 = 0$;

N6. $x.Sy = x.y + x$;

N7. $x \not< 0$;

N8. $x < Sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$;

N9. $x < y \vee x = y \vee y < x$;

Нека за произволно естествено n с $\overline{n}$ означим терма

$$\overline{n} \equiv \underbrace{SS\ldots S}_{n}0.$$

Термовете $\overline{n}$ наричаме номерали. Ще докажем следните твърдения за номералите

(i) $\vdash_{PA^-} S\overline{m} = \overline{m+1}$;

(ii) $\vdash_{PA^-} \overline{m} \neq \overline{n}$, за $m \neq n$;

(iii) $\vdash_{PA^-} \overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$;

(iv) $\vdash_{PA^-} \overline{m}.\overline{n} = \overline{mn}$;

(v) $\vdash_{PA^-} \overline{m} \not< \overline{n}$, за $m \geq n$;

(vi) $\vdash_{PA^-} \overline{n} < \overline{m}$, за $n < m$.

(i) е очевидно, тъй като $S\overline{m} \equiv \overline{m+1}$. За (ii) нека първо $m < n$. Тогава $n - m \geq 1$. Следователно

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{0 \neq Sx}\,{\scriptstyle (N1)}}{0 \neq \overline{n-m}}\,{\scriptstyle (ПЗ)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Sx = Sy \to x = y}\,{\scriptstyle (N2)}}{x \neq y \to Sx \neq Sy}\,{\scriptstyle (TT)}}{0 \neq \overline{n-m} \to \overline{1} \neq \overline{n-m+1}}\,{\scriptstyle (ПЗ)}}{\overline{1} \neq \overline{n-m+1}}\,{\scriptstyle (TT)} \atop {\vdots \atop \overline{m-1} \neq \overline{n-1}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Sx = Sy \to x = y}\,{\scriptstyle (N2)}}{x \neq y \to Sx \neq Sy}\,{\scriptstyle (TT)}}{\overline{m-1} \neq \overline{n-1} \to \overline{m} \neq \overline{n}}\,{\scriptstyle (ПЗ)}}{\overline{m} \neq \overline{n}}\,{\scriptstyle (TT)}$$

Нека сега $m > n$. Тогава, използвайки, че $\vdash_{PA^-} \overline{n} \neq \overline{m}$ получаваме

$$\dfrac{{\vdots \atop \overline{n} \neq \overline{m}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\overline{m} = \overline{n} \to \overline{n} = \overline{m}}\,{\scriptstyle (T=)}}{\overline{n} \neq \overline{m} \to \overline{m} \neq \overline{n}}\,{\scriptstyle (TT)}}{\overline{m} \neq \overline{n}}\,{\scriptstyle (TT)}$$

Нека сега докажем (iii).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x + 0 = x}\,{\scriptstyle (N3)}}{\overline{m} + 0 = \overline{m}}\,{\scriptstyle (ПЗ)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x + Sy = S(x + y)}\,{\scriptstyle (N4)}}{\overline{m} + \overline{1} = S(\overline{m} + 0)}\,{\scriptstyle (ПЗ)}}{\overline{m} + \overline{1} = \overline{m+1}}\,{\scriptstyle (T=)} \atop {\vdots \atop \overline{m} + \overline{n-1} = \overline{m+n-1}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{x + Sy = S(x + y)}\,{\scriptstyle (N4)}}{\overline{m} + \overline{n} = S(\overline{m} + \overline{n-1})}\,{\scriptstyle (ПЗ)}}{\overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}}\,{\scriptstyle (T=)}$$

Нека сега докажем (iv).

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{}{x.0 = 0}\,\text{(N5)}}{\overline{m}.0 = 0}\,\text{(ПЗ)}
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{}{x.Sy = x.y + x}\,\text{(N6)}}{\overline{m}.\overline{1} = \overline{m}.0 + \overline{m}}\,\text{(ПЗ)}
    \qquad
    \dfrac{}{0 + \overline{m} = \overline{m}}\,\text{(iii)}
  }{\overline{m}.\overline{1} = \overline{m.1}}\,\text{(T=)}
  \\ \vdots \\
  \overline{m}.\overline{n-1} = \overline{m.(n-1)}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{}{x + Sy = S(x+y)}\,\text{(N4)}}{\overline{m} + \overline{n} = S(\overline{m} + \overline{n-1})}\,\text{(ПЗ)}
  \qquad
  \dfrac{}{\overline{m} + \overline{n-1} = \overline{m+n-1}}\,\text{(iii)}
}{\overline{m}.\overline{n} = \overline{mn}}\,\text{(T=)}
$$

За (v) нека първо забележим, че щом $m \geq n$, то имаме $m \neq k$ за $k < n$. Тогава

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{}{x \not< 0}\,\text{(N7)}}{\overline{m} \not< 0}\,\text{(ПЗ)}
    \qquad
    \dfrac{}{\overline{m} \neq \overline{0}}\,\text{(ii)}
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x < Sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y)}\,\text{(N8)}}{x \not< Sy \leftrightarrow (x \not< y \;\&\; x \neq y)}\,\text{(TT)}}{\overline{m} \not< \overline{1} \leftrightarrow (\overline{m} \not< 0 \;\&\; \overline{m} \neq 0)}\,\text{(ПЗ)}
  }{\overline{m}.\overline{1} = \overline{m.1}}\,\text{(T=)}
  \\ \vdots \\
  \overline{m} \not< \overline{(n-1)}
  \qquad
  \dfrac{}{\overline{m} \neq \overline{n-1}}\,\text{(ii)}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x < Sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y)}\,\text{(N8)}}{x \not< Sy \leftrightarrow (x \not< y \;\&\; x \neq y)}\,\text{(TT)}}{\overline{m} \not< \overline{n} \leftrightarrow (\overline{m} \not< \overline{n-1} \;\&\; \overline{m} \neq \overline{n-1})}\,\text{(ПЗ)}
}{\overline{m} \not< \overline{n}}\,\text{(T=)}
$$

Накрая за (vi) имаме, че $m \not< n$ и $m \neq n$ и следователно

$$
\dfrac{
  \dfrac{}{\overline{m} \not< \overline{n}}\,\text{(v)}
  \qquad
  \dfrac{}{\overline{m} \neq \overline{n}}\,\text{(ii)}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{}{x < y \vee x = y \vee y < x}\,\text{(N9)}}{\overline{m} < \overline{n} \vee \overline{m} = \overline{n} \vee \overline{n} < \overline{m}}\,\text{(ПЗ)}
}{\overline{n} < \overline{m}}\,\text{(TT)}
$$