Домашно №2 по Дискретни Структури на специалност Компютърни науки, 2 поток, зимен семестър 2020/2021г., 30 ноември 2020 г.

тема: Комбинаторика

Име: .... ФН: .... Група: . .

Задача	1	2	3	4	Макс.
получени точки					
от максимално	25	25	25	25	100

Задача 1: Нека двуместният предикат $P(x, y)$, на който първият и вторият домейн е $\mathbb{N}^+$, има следния смисъл: $P(x, y)$ е истина тогава и само тогава, когато x дели y. Примерно, $P(2, 5)$ е лъжа, докато $P(2, 6)$ е истина.

Нека n е произволно цяло положително число и множеството S е дефинирано така:

$$S = \{1, 2, \ldots, 2n - 1, 2n\}$$

Докажете, че

$$\forall T \subseteq S((|T| = n + 1) \to \exists a, b \in T(a \neq b \land P(a, b)))$$

Упътване: използвайте принципа на чекмеджетата. Ключовото наблюдение е, че всяко число от $\mathbb{N}^+$ може да се представи по един единствен начин като произведение от нечетно число и степен на двойката. Разгледайте множеството $S' = \{a \in S \mid a \text{ е нечетно}\}$. Каква е мощността на S'? Имайки предвид $|S'|$ и условието на задачата, намерете удачен избор на "ябълки" и "чекмеджета", така че принципът на чекмеджетата да е приложим.

Задача 2: За колко пермутации на числата 1, 2, ..., 100 е вярно, че нито едно четно число k не е на k-та позиция?

Задача 3: Нека $a \geq 2$. Нека $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_a\}$. Нека $\Pi(X)$ е множеството от всички разбивания на X. Нека $b \in \{1, \ldots, a - 1\}$. Нека

$$f(a, b) = \{x \in \Pi(A) \,:\, |x| = b\}$$

Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$f(a, b) = bf(a - 1, b) + f(a - 1, b - 1)$$

3 т. **Задача 4:** Първо, докажете с комбинаторни съображения, че

$$\binom{n}{k}\binom{k}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{k-q} \tag{1}$$

15 т. Второ, докажете с комбинаторни съображения, че

$$\sum_{0 \leq q \leq k} \binom{n-q}{k-q} = \binom{n+1}{k} \tag{2}$$

Упътване: Тъждеството далечно напомня на едно тъждество, което разгледахме на лекции и което доказахме с комбинаторни разсъждения, мислейки за разходки в правоъгълна мрежа. Сега не мислете за правоъгълна мрежа и за разходки. Мислете за k-елементните поднможества на $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Очевидно дясната страна брои точно тези подмножества.

Може да се покаже, че лявата страна брои същите подмножества, но по-подробно. Това обаче не е съвсем очевидно. За всяко от тези подмножества, нека означим с $q+1$ е най-малкото число, което не се среща в него. Щом $q+1$ е най-малкото число, което ***не се среща****, какво може да кажете за числата $1, \ldots, q$? Имайки предвид извода, който току-що направихте, кажете какво може да варира във въпросното подмножество и какво не може да варира в него? И още: в какви граници може да се променя q?*

7 т. Използвайки (1) и (2), докажете, че

$$\sum_{0 \leq q \leq k} \frac{\binom{k}{q}}{\binom{n}{q}} = \frac{n+1}{n+1-k} \tag{3}$$