ТЕМА 10: ДЪРВЕТА

Дефиниции:
Дърво
Гора
Кореново дърво
Двоично дърво
Покриващо дърво на граф

Алгоритми за обхождане на графи
Обхождане в дълбочина
Обхождане в ширина

Алгоритми за построяване на оптимално покриващо дърво
Алгоритъм на Прим
Алгоритъм на Крускал

Алгоритъм на Dijkstra за намиране на минимални пътища от даден източник в граф

Задачи за упражнение:

Задача 1: Нека графът $G(V, E)$ има поне два върха. Да се докаже еквивалентността на следните твърдения:

(1) G е свързан с $|V| - 1$ ребра;

(2) G е свързан, но при отстраняване на произволно ребро се получава несвързан граф;

(3) Всяка двойка върхове е свързана с единствен прост път;

(4) G няма цикли, но при добавяне на ребро между произволни два върха се получава цикъл.

<u>*Доказателство:*</u> Ще докажем, че тези твърдения са еквивалентни на твърдението: графът е свързан и няма цикли, т.е. той е дърво.

1. $G(V, E)$ е свързан без цикли $\Rightarrow$ (1)

Графът е свързан $\Rightarrow$ $|E| \geq n - 1$. Да допуснем, че $|E| > n - 1$. Да обходим графа в ширина от произволен връх, например v_0. Ако върховете на разстояние 1 са n_1, то ребрата към тях са същия брой. Така на всяка стъпка се добавят един и същи брой върхове и ребра. При изчерпване на върховете ще се окаже, че има неизползвано ребро, при добавянето на което ще се получи цикъл, което е противоречие.

Следователно, броят на ребрата е точно $n - 1 \quad \Rightarrow \quad (1)$.

2. (1) $\Rightarrow$ (2)

Нека графът е свързан с $|V| - 1$ ребра. Ще докажем, че при отстраняване на рабро се получава несвързан граф.Наистина, ако отстраним ребро, броят на ребрата ще стане $|V| - 2$, т.е. нарушава се необходимото условие графът да е свързан. Така ще се получи несвързан граф.

3. (2) $\Rightarrow$ (3) Нека графът е свързан и при отстраняване на произволно ребро той престава да бъде свързан. Да допуснем, че има два върха - v_i и v_j, които са свързани с два пътя, което ще образува цикъл. Ако махнем ребро от единия път, то графът ще остане свързан, което е противоречие.

4. (3) $\Rightarrow$ (4)

Всяка двойка върхове в графа е свързана с единствен прост път, следователно в него няма цикъл. Нека добавим произволно ребро (v_i, v_j). Тъй като между v_i и v_j е имало път, то с новото ребро ще се получи цикъл.

5. (4) $\Rightarrow G(V, E)$ е свързан без цикли

В G няма цикли, но при добавяне на ребро на произволно място се получава цикъл. Ще докажем, че графът е свързан.

Да допуснем, че G не е свързан. Следователно има два върха v_i и v_j, между които няма път. Тогава ако добавим реброто (v_i, v_j), то няма да се получи цикъл, което е противоречие.

Така доказахме, че (1), (2), (3) и (4) дефинират дърво.

Задача 2: Нека G е свързан граф. Да се докаже, че G е дърво точно тогава, когато всеки негов връх от степен по-голяма от 1 е срязващ.

Задача 3: Всяко дърво с поне два върха има поне два висящи върха.

Доказателство: Ще докажем твърдението с индукция по броя на върховете $|V| = n$.

$P(n): \; D(V, E)$ дърво и $|V| = n \Rightarrow D$ има два висящи върха

1. База: $n = 2 \quad |V| = 2$ и двата върха са висящи $\;\Rightarrow P(2)$

2. Индукционна хипотеза: Предполагаме, че за някое $k \geq 2: \; P(k)$

3. Индукционна стъпка: Ще докажем P(k+1)

Да разгледаме произволно дърво $D(V, E)$ с $k + 1$ върха. Съгласно индуктивната дефиниция D е получено от дърво D' с k върха чрез присъединяване на връх и ребро. За D' е в сила индукционното предположение, т.е. то има поне два висящи върха. При построяването на D новият връх е присъединен към листо, при което броят на висящи върхове се запазва, или към вътрешен връх, при което броят на висящите върхове се увеличава с 1.

4. Заключение: $\forall n \geq 2 : P(n)$

Задача 4: Да се докаже, че ако в граф с n върха има $n-1$ висящи върха, то графът или е дърво или не е свързан.

Доказателство: Както знаем от *Задача 1* на *Тема 9*: $\sum\limits_{v \in V} d(v) = 2|E|$. Съгласно условието $\sum\limits_{v \in V} d(v) = (n - 1) + k$ където $0 \leq k \leq n - 1$.

Има два възможни случая:

1. $k = n - 1 \quad \Rightarrow$ графът е дърво;

2. $k < n - 1 \quad \Rightarrow$ графът не е свързан, защото е нарушено неоходимото условие за свързаност.

Задача 5: Да се докаже, че всяко дърво с поне два върха е двуделен граф.

<u>*Доказателство:*</u> Ще докажем твърдението с индукция по броя на върховете $|V| = n$.

$P(n):\ D(V,E), |V| = n \Rightarrow D$ е двуделен граф

1. База: $n = 2 \quad |V| = 2$ очевидно дървото с два върха и едно ребро е двуделен граф $\Rightarrow P(2)$

2. Индукционна хипотеза: Предполагаме, че за някое $k \geq 2:\ P(k)$

3. Индукционна стъпка: Ще докажем P(k+1)

Да разгледаме произволно дърво $D(V,E)$ с $k+1$ върха. Съгласно индуктивната дефиниция, D е получено от дърво $D^{'}$ с k върха чрез присъединяване на врьх и ребро. За $D^{'}$ е в сила индукционното предположение, т.е. то е двуделен граф. При построяването на D новият връх се присъединява към един от върховете на $D^{'}$, при което еднозначно се определя дела, в който той попада.

От това следва $P(k+1)$.

4. Заключение: $\forall n \geq 2 : P(n)$

Задача 6: Да се докаже, че в дърво с нечетен диаметър всеки два максимални прости пътя имат общо ребро.

<u>*Доказателство:*</u> Съгласно доказаното в *Задача 14* на *Тема 9* в свързан граф всеки два максимални прости пътя имат общ връх. Тъй като в случая дължината на тези пътища е нечетно число, то те трябва да имат поне два общи върха. Единственият начин пътищата да имат повече от един общ връх без да се получи цикъл е ако те имат общо ребро.

Задача 7: Нека n_1 е броят на висящите върхове на дърво с n върха, никой от които не е от степен 2. Да се докаже, че $n_1 \geq n/2 + 1$.

<u>*Доказателство:*</u> Отново използваме факта, че $\sum\limits_{v \in V} d(v) = 2|E| \quad \Rightarrow$

$n_1 + \sum\limits_{i=1}^{n-n_1} x_i = 2(n-1)$, където x_i е степента на i-тия връх на дървото $\quad \Rightarrow$

$$2(n-1) - n_1 = \sum_{i=1}^{n-n_1} x_i \ \geq \ 3(n-n_1) \quad \Rightarrow$$
$$2n - n_1 - 2 \geq 3n - 3n_1 \quad \Rightarrow$$
$$n_1 \geq \frac{n+2}{2}$$

Задача 8: Да се докаже, че ако едно дърво съдържа връх от степен k, то има поне k висящи върха.

<u>*Доказателство:*</u> Нека $D(V,E)$ е дърво и $v \in V,\ d(v) = k$ е връх в него. Отстраняваме v и инцидентните с него ребра и дървото се разпада на k свързани компоненти $D_i(V_i, E_i)$, всяка от които е дърво. Ако $|V_i| = 1$, то съответният връх е бил висящ в D. Ако $|V_i| > 1$, то в съответната свързана компонента има два висящи върха. Единият е бил свързан с v в $D(V,E)$, а другият е бил висящ.

Следователно във всяка от свързаните компоненти е имало поне по един висящ връх, така че в цялото дърво има поне k висящи върха.

Задача 9: Да се намери броят на листата на дърво с k вътрешни върхове, всеки от които има степен 2.

<u>*Решение:*</u> Ще покажем, като използваме метода на индукцията, че броят на листата е с 1 по-голям от броя на вътрешните върхове.

Да означим с nI броя на вътрешните върхове, а с nL - броя на листата на дървото.
$P(n) : D(V, E) - \textit{full binary tree} \ \Rightarrow \text{nL} = \text{nI} + 1$

1. База: $n = 1 \quad |V| = 1, \ nI = 0, nL = 1 \ \Rightarrow P(1)$

2. Индукционна хипотеза: Предполагаме, че за някое $k \geq 1 : \ P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)$

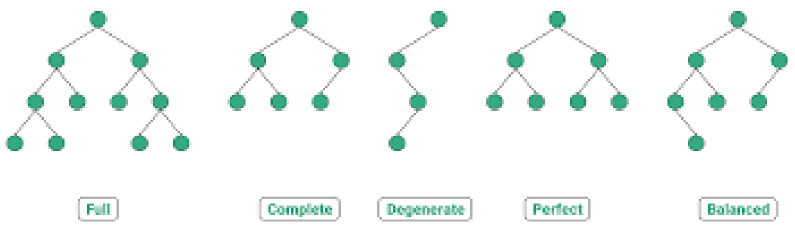
3. Индукционна стъпка: Ще докажем P(k+1)

Нека дървото $D(V, E)$ с указаните свойства е с $k + 1$ върха. Коренът тук е вътрешен връх, следователно има две поддървета - $D'(V', E')$ и $D'(V'', E'')$.

Всяко от тези поддървета има исканите свойства и броят на вътрешните върхове е най-много k. Следователно можем да приложим ИХ: $nL' = nI' + 1, \ nL'' = nI'' + 1$.

Но обединението на листата на двете поддървета съвпада с множеството на листата на цялото дърво. Така стигаме до следното:
$nL' + nL'' = nI' + 1 + nI'' + 1 \ \Rightarrow$
$nL = nL' + nL'' = nI' + nI'' + 2 = nI - 1 + 2 = nI + 1 \ \Rightarrow P(k + 1)$

4. Заключение: $\forall n \geq 1 : P(n)$



Фигура 1

Задача 10: В перфектно двоично дърво с височина n да се намери броят на:

a) листата: *Отговор:* 2^n

b) всички върхове: *Отговор:* $2^{n+1} - 1$

Задача 11: Нека $D = d_1, d_2, ..., d_n; d_i \in \mathbb{N}^+; n \geq 2$ е редица числа. Докажете, че D е редица от степените на върхове на дърво тогава и само тогава, когато е вярно, че $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

<u>*Доказателство:*</u>

I. Нека $d_1, d_2, ..., d_n; d_i \in \mathbb{N}^+; n \geq 2$ е редица от степените на върховете на дърво. Следователно
$\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2|E| = 2(n - 1) = 2n - 2$

II. Доказателството в обратна посока ще направем по индукция.

$P(n)$: $d_1, d_2, ..., d_n; d_i \in \mathbb{N}^+; n \geq 2, \sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2 \quad \Rightarrow$ съществува дърво със степени $d_1, d_2, ..., d_n$

1. База: $n = 2 \quad d_1 + d_2 = 2 \ \Rightarrow d_1 = d_2 = 1 \ \Rightarrow P(2)$ Въпросното дърво е единственото дърво с два върха и едно ребро.

2. Индукционна хипотеза: Предполагаме, че за някое $k \geq 2, P(k)$

3. Индукционна стъпка: Ще докажем P(k+1)

Разглеждаме редица $d_1, d_2, ..., d_k, d_{k+1}; \sum\limits_{i=1}^{k+1} d_i = 2k$, като считаме че е сортирана в нерастящ ред. Очевидно $d_{k+1} = 1$ и $d_1 \geq 2$.

Дефинираме нова редица: $\widetilde{d_1} = d_1 - 1, \widetilde{d_2} = d_2, \ldots, \widetilde{d_k} = d_k$.

$\sum\limits_{i=1}^{k} \widetilde{d_i} = \sum\limits_{i=2}^{k} + \widetilde{d_1} = 2k - 2$

Съгласно ИХ съществува дърво с k върха и редица от степени на върховете $\widetilde{d_1}, \widetilde{d_2}, \ldots, \widetilde{d_k}$. Ако към върха със степен $\widetilde{d_1}$ добавим нов връх, ще получим дърво с k върха и редица от степени $d_1, d_2, ..., d_k, d_{k+1}$, от което следва $P(k+1)$.

4. Заключение: $\forall n \geq 2 : P(n)$

Задача 12: Нека $T_1(V, E_1)$ и $T_2(V, E_2)$ са покриващи дървета на свързания граф $G(V, E)$. Да се докаже, че за всяко ребро $e \in E_1 \setminus E_2$ има ребро $e^{'} \in E_2 \setminus E_1$, такова че $T_1^{'}(V, E_1 \setminus \{e\} \cup \{e^{'}\})$ и $T_2^{'}(V, E_2 \setminus \{e^{'}\} \cup \{e\})$ също са покриващи дървета на графа.

Доказателство: Нека $T_1(V, E_1)$ и $T_2(V, E_2)$ са две покриващи дървета на $G(V, E)$, който е свързан. Нека $e = (x, y)$ и $e \in E_1 \setminus E_2$.

Графът $T_1^{'}(V, E_1 \setminus \{e\}\})$ не е свързан и има точно две свързани компоненти $G^{'}$ и $G^{''}$, като краищата на реброто e попадат в различни компоненти.

Графът $T_2^{'}(V, E_2 \cup \{e\})$ има цикъл C, който минава през x и y, краищата на добавеното ребро. Следователно, в T_2 има ребро $e^{'}$, което съединява върховете $t \in G^{'}$ и $z \in G''$.

Така се оказва, че $T_1^{'}(V, E_1 \setminus \{e\} \cup \{e^{'}\})$ е свързан граф с $n - 1$ ребра $\Rightarrow$ е дърво и то е покриващо за G.

$T_2^{'}(V, E_2 \cup \{e\})$ е свързан, с n ребра и има цикъл. При махане на реброто $e^{'}$ графът $T_2^{'}(V, E_2 \setminus \{e^{'}\} \cup \{e\})$ остава свързан и с $n - 1$ ребра, следователно е дърво и то покриващо за G.

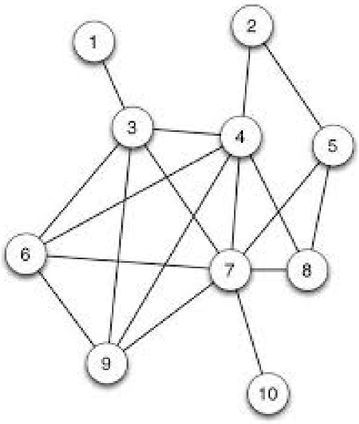
Задача 13: Докажете, че ако в свързания граф $G(V, E)$ всички ребра са с различни тегла, то графът има единствено минимално покриващо дърво.

Доказателство: Да допуснем противното - графът има две минимални покриващи дървета $T_1(V_1, E_1)$ и $T_2(V_2, E_2)$ и теглова функция $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Нека e е реброто с максимално тегло в множеството $(E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $e \in E_1$.

Съгласно *Задача 12* знаем, че $\exists e' \in E_2 \setminus E_1$ такова, че $T_1^{'}(V, E_1 \setminus \{e\} \cup \{e'\})$ е също покриващо дърво на $G(V, E)$. Но пред вид избора на реброто e е вярно, че $w(e) > w(e')$. Следователно, $w(T_1^{'}) < w(T_1)$, което е противоречие.

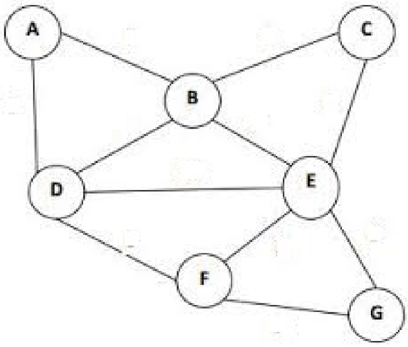
Следователно, допускането, че графът има две минимални покриващи дървета е погрешно, от което следва твърдението в условието на задачата.

Задача 14: За графа на *Фигура 1* постройте покриващо дърво при обхождане в ширина с начален връх 1. Постройте по негово подобие покриващи дървета с начален връх – всеки от останалите върхове.



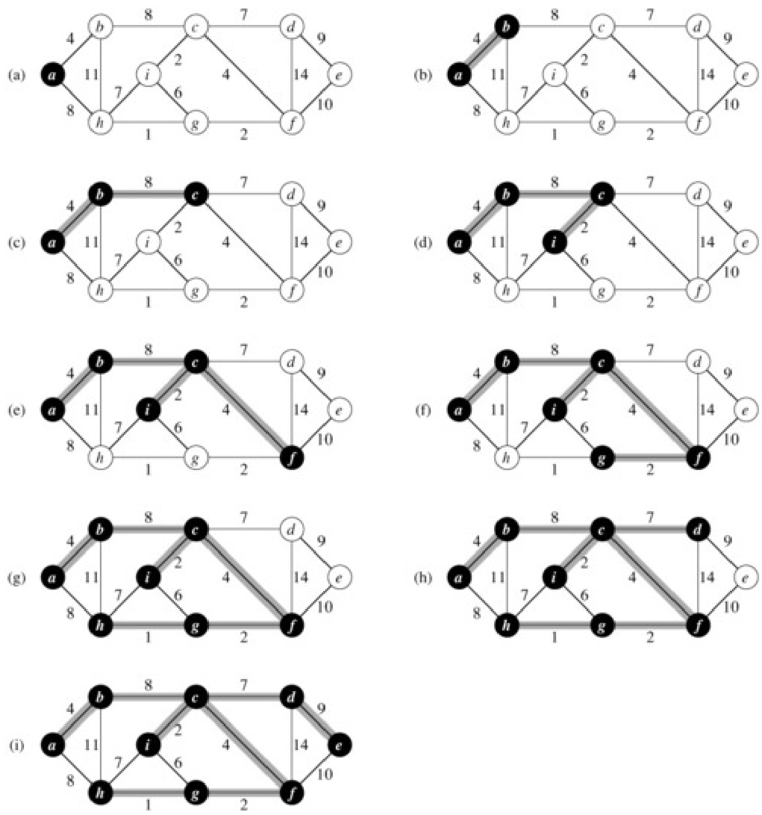
Фигура 2

Задача 15: За графа на *Фигура 2* постройте покриващо дърво при обхождане в дълбочина с начален връх A. Постройте по негово подобие покриващи дървета с начален връх – всеки от останалите върхове.



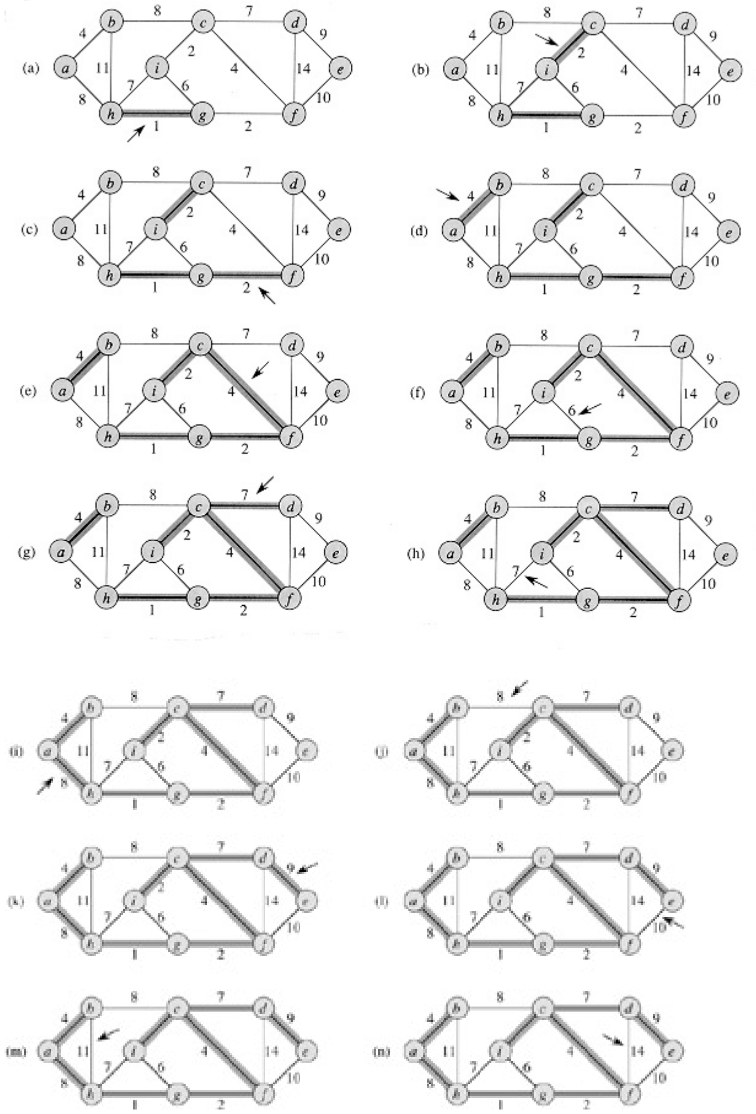
Фигура 3

Задача 16: На *Фигура 3* е представен граф с тегла на ребрата и негово оптимално покриващо дърво с корен връх a, построено по алгоритъма на Прим. Постройте по негово подобие оптимални покриващи дървета с корен всеки от другите върхове.



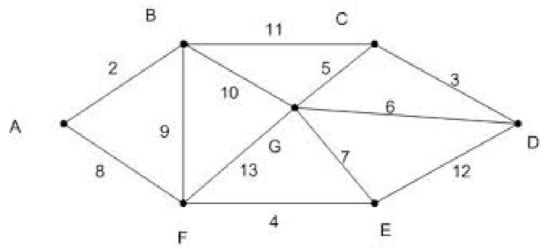
Фигура 4

Задача 17: На следващата фигура е представен граф с тегла на ребрата и негово оптимално покриващо дърво, построено по алгоритъма на Крускал.



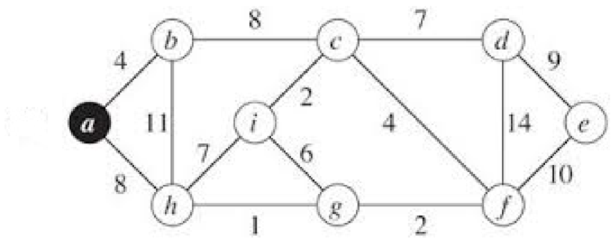
Фигура 5

Задача 18: На *Фигура 5* е представен граф с тегла на ребрата. Постройте оптимални покриващи дървета по алгоритмите на Прим и Крускал.



Фигура 6

Задача 19: На *Фигура 6* е представен граф с тегла на ребрата. Да се намерят най-късите пътища от връх a до всички останали върхове в графа по алгоритъма на Дейкстра.



Фигура 7