ТЕМА 11: БУЛЕВ КУБ

Дефиниции:

Булев вектор

Дължина на булев вектор

Тегло на булев вектор: $|\widetilde{\alpha^n}| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

Число (номер) на булев вектор: $\nu(\widetilde{\alpha^n}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 2^{n-i}$

Разстояние между булеви вектори: $\rho(\widetilde{\alpha^n}, \widetilde{\beta^n}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$

n-мерен двоичен куб: $B^n(J_2^n, E_n), E_n = \{(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j),\ \rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j) = 1\}$

Слой в n–мерния двоичен куб: $B_k^n = \{\widetilde{\alpha} \in J_2^n : |\widetilde{\alpha}| = k\}$

Сфера в n–мерния двоичен куб.

Кълбо в n–мерния двоичен куб.

Релация предшестване на булеви вектори: $\widetilde{\alpha}^n \preceq \widetilde{\beta}^n \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i,\ i \in I_n$

Непосредствено предшестване на булеви вектори: $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta} \wedge \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1$

Верига в n–мерния двоичен куб:

$$C = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, ...\widetilde{\alpha}_k | \widetilde{\alpha}_1 \preceq \widetilde{\alpha}_2 ... \preceq \widetilde{\alpha}_k, \rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}) = 1, i \in I_{k-1}\}$$

Стена с ранг k и размерност $n - k$ в n–мерния двоичен куб

Релация лексикографска наредба в J_2^n

Релация – наредба по номер в J_2^n

Задачи за упражнение:

Задача 1: Намерете номерата на векторите: (0111010100), (1111), (10001).

Задача 2: Намерете булев вектор с дължина 6 и число 19.

Задача 3: Намерете броя на векторите $\widetilde{\alpha} \in B_k^n :\ 2^{n-1} \leq \nu(\widetilde{\alpha}) < 2^n$.

Решение: Неравенството $\nu(\widetilde{\alpha}) < 2^n$ е изпълнено за всяко число, което в двоична бройна система се записва с n цифри. А за да е в сила неравенството $2^{n-1} \leq \nu(\widetilde{\alpha})$ старшата цифра на числото в двоичния му запис трябва да е 1. И така, числото на всеки булев вектор с дължина n, който има 1 в първа позиция, изпълнява условието на задачата. Броят на тези вектори е 2^{n-1}.

Задача 4: Намерете броя на ненаредените двойки съседни върхове на B^n.

Задача 5: Да се докаже, че B^n е регулярен и да се намери броят на ребрата му.

Доказателство: Нека $\widetilde{\alpha}$ е произволен връх в B^n. Той има точно n съседни върхове - тези, които се получават при инвертиране на една позиция в $\widetilde{\alpha}$, така че $d(\widetilde{\alpha}) = n$. Следователно, B^n е регулярен от степен n.

Така, като знаем броя на върховете и степента на всеки един от тях, можем да определим броя на ребрата $|E| = \frac{1}{2} n 2^n = n 2^{n-1}$.

Задача 6: Да се докаже, че B^n е двуделен граф.

<u>*Доказателство:*</u> Всяко ребро в B^n свързва върхове $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, за които $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = 1$. Това значи, че векторите $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ имат тегла с различна четност. От това следва, че B^n е двуделен, като двата дяла са $V' = \{\widetilde{\alpha} \in J_2^n : |\widetilde{\alpha}| = 2k\}$ и $V'' = \{\widetilde{\beta} \in J_2^n : |\widetilde{\beta}| = 2k+1\}$.

Задача 7: Намерете броя на ненаредените двойки върхове на B^n, за които е изпълнено $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = k$.

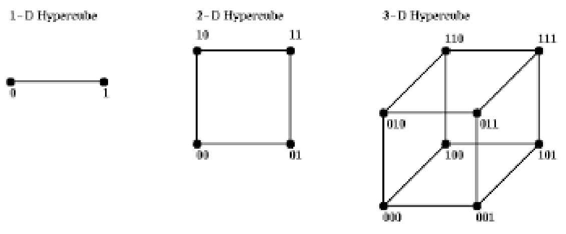
<u>*Решение:*</u> Решението на задачата включва решаване на три подзадачи. Първата е да определим позициите, в които векторите $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ се различават - k на брой. Това става по $\binom{n}{k}$ начина. Втората е да определим съдържанието на двата вектора в тези позиции - по 2^{k-1} начина. Третата е да определим съдържанието на общите позиции - по 2^{n-k} начина.

Така крайният отговор е $\displaystyle\binom{n}{k}2^{k-1}2^{n-k} = \binom{n}{k}2^{n-1}$.

Задача 8: Намерете $|B_k^n|$.

Задача 9: Намерете броя на векторите в стена с ранг k в n–мерния двоичен куб.

Отговор: 2^{n-k}



Фигура 1

Задача 10: Намерете броя на $(n-k)$-мерните стени в n–мерния двоичен куб.

Задача 11: Дадени са векторите $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in J_2^n$ такива, че $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = m$. Да се намери броят на векторите $\widetilde{\gamma}$ за които $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}) = m$.

<u>*Решение:*</u> Пред вид това, че разстоянието ρ е метрика, е изпълнено:

$\forall\widetilde{\gamma} \in B^n(\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}) \geq \rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}))$

Ние ще преброим тези вектори, за които в неравенството на триъгълника се достига равенство.

В позициите, в които $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ се различават, както и да изберем съответната координата на $\widetilde{\gamma}$, той ще се различава точно от единия от двата вектора. Следователно $\widetilde{\gamma}$ трябва да съвпада с другите два вектора там, където те съвпадат, в противен случай ще се получи, че $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}) > m$.

Търсените вектори са елементите на множеството $\Gamma = \{\widetilde{\gamma} | \alpha_i = \beta_i \to \gamma_i = \alpha_i\}$, чиято мощност е $|\Gamma| = 2^{n-m}$.

Задача 12: Дадени булевите вектори $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in J_2^n$ такива, че $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta} \wedge \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = k$. Да се намери броят на векторите $\widetilde{\gamma} : \widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\gamma} \preceq \widetilde{\beta}$.

<u>*Решение:*</u> Векторите $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ се различават в k позиции, като там координатите на $\widetilde{\alpha}$ са нули, а на $\widetilde{\beta}$ са единици. За да е изпълнено $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\gamma} \preceq \widetilde{\beta}$ трябва векторът $\widetilde{\gamma}$ да се различава от $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ само там, където те се различават.

Търсените вектори са елементите на множеството $\Gamma = \{\widetilde{\gamma} | \alpha_i = \beta_i \rightarrow \gamma_i = \alpha_i\}$, чиято мощност е $|\Gamma| = 2^{n-k}$.

Задача 13:Намерете броя на векторите $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$, в които между всеки две единични координати има поне r нулеви.

Задача 14: Да се докаже, че:

a) Ако два n-мерни булеви вектори имат равни тегла, то те са несравними;

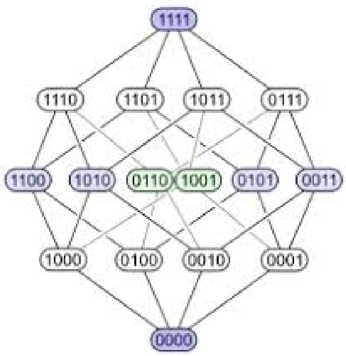
b) Измежду всеки $(n+2)$ n–мерни булеви вектори има двойка несравними вектори;

c) В J_2^n има само два сравними противоположни вектора;

d) Броят на n-мерни булеви вектори, които не са сравними с даден вектор $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$, е равен на $2^n - 2^k - 2^{n-k} + 1$;

e) В J_2^n съществува подмножество с мощност $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, чиито елементи са два по два несравними вектори.

Задача 15: Намерете броя на различните максимални растящи вериги в B^n.



Фигура 2

<u>*Решение:*</u> За да бъде максимална една верига, тя трябва да започва с нулевия вектор (000...0) и да завършва с единичния вектор (111...1). Пред вид това, че разстоянието между съседните вектори във веригата е 1, то всяка верига започва в слой B_0^n, минава през всеки следващ слой на булевия куб и завършва в последния слой B_n^n.

Когато веригата е построена от $\widetilde{\alpha_0} \in B_0^n$ до $\widetilde{\alpha}_i \in B_i^n$, то следващият вектор можем да изберем по $n - i$ начина. Така броят на всички вериги с исканите свойства е: $n(n-1)(n-2)...2.1 = n!$

Задача 16: Намерете броя на различните максимални растящи вериги в B^n, които съдържат фиксиран вектор $\widetilde{\alpha} \in B^n_k$.

Решение: Както видяхме в предишната задача, за да бъде максимална една верига, тя трябва да започва с нулевия вектор (000...0) и да завършва с единичния вектор (111...1). За да е сигурно, че веригата ще съдържа указания вектор, ще я разгледаме като съставена от две вериги - първата от вектора (000...0) до вектора $\widetilde{\alpha}$ и втората от същия вектор до единичния вектор (111...1).

Първата верига започва от единствения вектор в слоя B^n_0 и минава последователно през всеки следващ по намер слой, докато стигне до $\widetilde{\alpha} \in B^n_k$. За да осигурим веригата да минава точно през указания вектор от слой B^n_k, да си представим построяването й в обратна посока - от $\widetilde{\alpha}$ до (000...0). При всеки преход към вектор от предишен слой трябва да намалим с едно броя на единиците. Така, броят на тези вериги е $k(k-1)(k-2)...2.1 = k!$

Съответно решението за броя на веригите от $\widetilde{\alpha}$ до (111...1) е:

$(n-k)(n-k-1)...2.1 = (n-k)!$

Така броят на всички максимални растящи вериги, съдържащи вектора $\widetilde{\alpha} \in B^n_k$ е $k!(n-k)!$

Задача 17: Да се докаже, че B^n е Хамилтонов граф.

Доказателство: Ще докажем твърдението с индукция по размерността на хиперкуба.

$P(n):\ B^n$ съдържа Хамилтонов цикъл

1. База: $n = 2$ Следният път в двумерния куб $B^2 : (00), (01), (11), (10), (00)$ е Хамилтонов цикъл $\Rightarrow P(2)$

2. Индукционна хипотеза: Предполагаме, че за някое $k \geq 2 :\ P(k)$

3. Индукционна стъпка: Ще докажем P(k+1)

Съгласно ИХ в B^k има Хамилтонов цикъл. Нека $\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, ..., \widetilde{\alpha}_{2^k-1}$ е верига тип цикъл, която съдържа всички върхове на куба.

Да съставим следната редица от вектори от J_2^{k+1} :

$0\widetilde{\alpha}_0, 0\widetilde{\alpha}_1, ..., 0\widetilde{\alpha}_{2^k-1}, 1\widetilde{\alpha}_{2^k-1}, , ..., 1\widetilde{\alpha}_1, 1\widetilde{\alpha}_0$

Както лесно можем да съобразим, в редицата няма повторение на вектори и всеки два вектора, съседни в редицата, са на разстояние 1. Първият и последният вектори в редицата също са на разстояние 1. Следователно, това е верига тип цикъл, която съдържа всички върхове на B^{k+1}.

Така доказахме, че B^{k+1} е Хамилтонов граф.

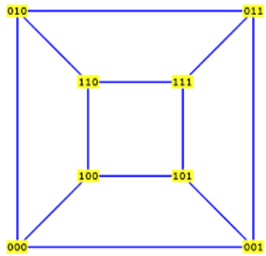
4. Заключение: $\forall n \geq 2 : P(n)$

Задача 18: Да се докаже, че в B^n няма цикли с нечетна дължина.

Доказателство: Липсата на цикли с нечтна дължина следва от факта, че графът е двуделен.

Същото може да се провери и директно, като съобразим, че всеки два върха, които са съседни в път в булевия куб, принадлежат на съседни по номер слоеве на куба. Така ако разгледаме произволен цикъл в графа и произволен връх от него, за да се върне пътят в същия връх трябва да премине четен брой ребра.

Задача 19: Да се докаже, че B^n е планарен за стойности на $n \in \{1, 2, 3\}$ и не е планарен при $n \geq 4$.



Фигура 3

Задача 20: Да се намери максимална антиклика в B^n.

Задача 21: Множеството $A \subseteq B^n$ е пълно, ако произволен вектор $\widetilde{\beta} \in B_k^n$ може да се намери при положение, че са известни разстоянията $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$: $\widetilde{\alpha} \in A$. Базис ще наричаме минимално пълно множество. Да се докаже, че:

a) произволна растяща верига $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, ..., \widetilde{\alpha}_n \in B^n$ е базис;

b) B_1^n и B_{n-1}^n са пълни при $n > 2$;

c) да се намери n, при което B_1^n не е базис.

Задача 22: Изпълнете следните действия:

1. Определете B^3;
2. Дайте геометрична интерпретация на B^3;
3. Сортирайте във възходящ ред лексикографски и по номер векторите, които са върхове на куба B^3;
4. Определете релацията предшестване в тримерния булев куб B^3;
5. Дайте примери за несравними вектори, върхове на куба B^3;
6. Дайте примери за стени на куба B^3.