Примерни решения на домашно №2 на КН2, 30 ноември 2020 г.

---

**Задача 1:** Нека двуместният предикат $P(x, y)$, на който първият и вторият домейн е $\mathbb{N}^+$, има следния смисъл: $P(x, y)$ е истина тогава и само тогава, когато $x$ дели $y$. Примерно, $P(2, 5)$ е лъжа, докато $P(2, 6)$ е истина.

Нека $n$ е произволно цяло положително число и множеството $S$ е дефинирано така:

$$S = \{1, 2, \ldots, 2n - 1, 2n\}$$

Докажете, че

$$\forall T \subseteq S((|T| = n + 1) \rightarrow \exists a, b \in T(a \neq b \wedge P(a, b)))$$

**Решение:** Иска се да се докаже, че както и да изберем $n + 1$ различни числа измежду 1, 2, …, $2n$, непременно две от избраните числа са такива, че едното дели другото.

Ключовото наблюдение е, че всяко цяло положително число $k$ е произведението от нечетно число и степен на двойката. Тоест, $k = q \cdot 2^j$, където $q$ е нечетно число, а $j$ е естествено число.

Нечетните числа от $S$ са точно $n$ на брой. Те са 1, 3, …, $2n - 1$. За всяко едно от тях конструираме множеството, състоящо се от него самото и неговите произведения със степени на двойката, които произведения са елементи на $S$. Тези множества са $n$ на брой, по едно за всяко нечетно от $S$, и множеството от тях е разбиване на $S$. За целите на задачата, те са чекмеджетата. А ябълките са произволно избраните $n + 1$ числа от условието. Съгласно принципа на чекмеджетата, поне две ябълки попадат в едно чекмедже; с други думи, поне две от избраните (различни!) числа са произведение от едно и също нечетно и (различни!) степени на двойката. Тогава очевидно по-малкото от тези дели по-голямото.

Като пример, нека $n = 6$. Тогава

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Множеството от нечетните е

$$S' = \{1, 2, 5, 7, 9, 11\}$$

Всяко число от $S$ е произведение на едно число от $S'$ и степен на двойката, като има един единствен начин за това. Примерно, $1 = 1 \cdot 2^0$, $2 = 1 \cdot 2^1$, $3 = 3 \cdot 2^0$, $4 = 1 \cdot 2^2$, и така нататък. Тогава чекмеджетата са

$$\{1, 2, 4, 8\}$$
$$\{3, 6, 12\}$$
$$\{5, 10\}$$
$$\{7\}$$
$$\{9\}$$
$$\{11\}$$

Вижда се, че както и да избираме 7 числа от $S$, поне две от тях ще се елементи на едно от тези множества. Нещо повече, двете въпросни различни числа не може да са елементи на едноелементните множества $\{7\}$ или $\{9\}$ или $\{11\}$, а трябва да са елементи на някое от другите. Е, очевидно, че ако вземем две различни числа от $\{1, 2, 4, 8\}$ или $\{3, 6, 12\}$ или $\{5, 10\}$, по-малкото дели по-голямото.

**Задача 2:** За колко пермутации на числата 1, 2, …, 100 е вярно, че нито едно четно число $k$ не е на $k$-та позиция?

**Решение:** Ще решим задачата с метода на включването и изключването. Универсумът $U$ е множеството от всички пермутации на числата 1, 2, …, 100. Очевидно $|U| = 100!$.

Нека $\mathcal{E}$ е множеството от четните естествени положителни числа, не по-големи от 100. С други думи, $\mathcal{E} = \{2, 4, 6, \ldots, 98, 100\}$. За всяко **подмножество** $Y \subseteq \mathcal{E}$, дефинираме $X_Y$ като множеството от тези пермутации, в които всяко $k \in Y$ се намира на позиция $k$. Примерно, $X_\emptyset = U$, $X_{\{2,10\}}$ са пермутациите, в които 2 е на втора позиция и 10 е на десета позиция, и така нататък.

Ние търсим

$$\left| \bigcap_{k \in \mathcal{E}} \overline{X_{\{k\}}} \right|$$

От принципа на включването и изключването, записан много компактно и униформно, имаме:

$$\left| \bigcap_{k \in \mathcal{E}} \overline{X_{\{k\}}} \right| = \sum_{Y \subseteq \mathcal{E}} (-1)^{|Y|} |X_Y|$$

Ключовото наблюдение е, че $|X_Y| = (100 - |Y|)!$, понеже фиксираме $|Y|$ на брой елементи по местата им, а останалите разполагаме по всички възможни начини на незаетите места. Тогава

$$\left| \bigcap_{k \in \mathcal{E}} \overline{X_{\{k\}}} \right| = \sum_{Y \subseteq \mathcal{E}} (-1)^{|Y|} (100 - |Y|)!$$

Дясната страна е сума с $2^{50}$ събираеми, защото е по всички подмножества на петдесетелементното множество $\mathcal{E}$. Тези събираеми можем да групираме в 51 групи по $|Y|$, където $|Y| \in \{0, 1, 2, \ldots, 49, 50\}$. Във всяка такава група, всички събираеми имат една и съща стойност, а на брой те (събираемите от една група) са $\binom{50}{|Y|}$. И така,

$$\left| \bigcap_{k \in \mathcal{E}} \overline{X_{\{k\}}} \right| = \sum_{0 \le j \le 50} (-1)^j \binom{50}{j} (100 - j)!$$

Това е и отговорът.

Числено, отговорът е

5653378582651796809160416679142784032669107826587248581076395765
6914211681291077403950004365134195570851173310787907740475875411
902952497701978112000000000000 $\approx 10^{158}$

**Задача 3:** Нека $a \geq 2$. Нека $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_a\}$. Нека $\Pi(X)$ е множеството от всички разбивания на $X$. Нека $b \in \{1, \ldots, a-1\}$. Нека

$$f(a,b) = \{x \in \Pi(A) \,:\, |x| = b\}$$

Докажете с комбинаторни разкъждения, че

$$f(a,b) = bf(a-1,b) + f(a-1,b-1)$$

**Решение:** Очевидно $f(a,b)$ е броят на разбиванията на $a$-елементно множество на точно $b$ дяла. На лекции нарекохме това "число на Стърлинг от втори род", но това е без значение. Оставаме с нотацията "$f(a,b)$".

Тъждеството

$$f(a,b) = bf(a-1,b) + f(a-1,b-1)$$

далечно прилича на тъждеството $\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1}$. Него доказахме с комбинаторни разсъждения, като фиксирахме произволен елемент, БОО $x_1$, и разгледахме поотделно помножествата, които съдържат $x_1$ и тези, които не съдържат $x_1$. Сега обаче става дума за разбивания, а не за подмножества. Дори да фиксираме $x_1$, няма разбиване, което не го съдържа в някой (в точно един) от дяловете си. Обаче, ако има дял, съдържащ само $x_1$, то за останалите $a-1$ елемента има точно $f(a-1,b-1)$ начина да бъдат разбити в $b-1$ дяла. Забележете, че щом има дял $\{x_1\}$, то останалите дялове трябва да са $b-1$ на брой, за да бъдат общо $b$ на брой.

И така, разбиваме разбиванията на

- тези, които имат дял $\{x_1\}$, а те са $f(a-1,b-1)$ на брой, както вече видяхме.
- тези, които нямат дял $\{x_1\}$. Но в тях $x_1$ трябва да се намира в дял с поне още един елемент. Ако махнем $x_1$, ще получим разбиване на точно $b$ дяла на множеството $X \setminus \{x_1\}$, което има $a-1$ елемента. Но $(a-1)$-елементно множество се разбива на $b$ дяла по $f(a-1,b)$ начина. Връщайки обратно $x_1$ към тези разбивания, за всяко от тях имаме избор от точно $b$ дяла, към всеки от които можем да добавим $x_1$, получавайки ново разбиване на $X$.

  И така, тези, които нямат дял $\{x_1\}$, са $bf(a-1,b)$.

Съгласно комбинаторния принцип на разбиването, имаме

$$f(a,b) = bf(a-1,b) + f(a-1,b-1)$$

*3 т.* **Задача 4:** Първо, докажете с комбинаторни съображения, че

$$\binom{n}{k}\binom{k}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{k-q} \tag{1}$$

*15 т.* Второ, докажете с комбинаторни съображения, че

$$\sum_{0 \leq q \leq k} \binom{n-q}{k-q} = \binom{n+1}{k} \tag{2}$$

*7 т.* Използвайки (1) и (2), докажете, че

$$\sum_{0 \leq q \leq k} \frac{\binom{k}{q}}{\binom{n}{q}} = \frac{n+1}{n+1-k} \tag{3}$$

**Решение:** Тъждество (1) може да се докаже по следния начин. Лявата страна брои начините да изберем

- в стъпка 1: $k$ елемента от $n$, и после
- в стъпка 2: от тези $k$ да изберем $q$.

Забележете, че това не е същото като да изберем само $q$ от $n$, защото има значение кои $k$ елемента сме избрали в стъпка 1.

Дясната страна брои начините да изберем

- в стъпка 1: $q$ елемента от $n$, и после
- в стъпка 2: да изберем още $k - q$ елемента измежду тази $n - q$, които не са избрани в стъпка 1.

Тези бройки са равни, защото има очевидна биекция между двете множества от подборки.

Тъждество (2) може да се докаже по следния начин. Дясната страна брои $k$-елементните подмножества на $(n+1)$-елементно множество. Нека вземем не кое да е $(n+1)$-елементно множество, а именно $\{1, 2, \ldots, n+1\}$.

Нека $X$ е произволно $k$-елементно подмножество на $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Нека $q+1$ е най-малкото число, което не се среща в $X$, като точните граници за $q$ са $0 \leq q \leq k$. Щом $q+1$ е най-малкото число, което не се среща в $X$, то числата 1, 2, $\ldots$, $q$ задължително са в $X$. Щом 1, 2, $\ldots$, $q$ задължително са в $X$, то това, което определя $X$, е кои числа, по-големи от $q+1$, са негови елементи; а тези числа са $k-q$ на брой, понеже $|X| = k$. С други думи, ако $q+1$ е най-малкото число, което не се среща в $X$, то $X$ се определя напълно от това, кои $k-q$ числа от множеството $\{q+2, q+3, \ldots, n+1\}$ са негови елементи.

Ясно е, че $|\{q+2, q+3, \ldots, n+1\}| = n+1-(q+2)+1 = n-q$. Ерго, различните възможности за $X$ са точно $\binom{n-q}{k-q}$.

Това, че точната горна граница за $q$ е $k$, трябва да е очевидно – видяхме, че числата 1, $\ldots$, $q$ задължително са в $X$, така че, ако $q > k$, тези числа биха били повече от $k$ на брой.

Но множеството от $k$-елементните подмножества на $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ се разбива по това, кое е най-малкото число, което не се среща. Прилагаме комбинаторния принцип на разбиването и получаваме (2).

Тъждество (3) ще докажем алгебрически. Общото събираемо $\frac{\binom{k}{q}}{\binom{n}{q}}$ от лявата страна представяме така съгласно (1):

$$\frac{\binom{k}{q}}{\binom{n}{q}} = \frac{\binom{n-q}{k-q}}{\binom{n}{k}}$$

Тогава

$$\sum_{0 \le q \le k} \frac{\binom{k}{q}}{\binom{n}{q}} = \sum_{0 \le q \le k} \frac{\binom{n-q}{k-q}}{\binom{n}{k}}$$

Но делителят $\binom{n}{k}$ не зависи от индексната променлина $q$. Следователно, всяко събираемо от дясната страна има множител $\frac{1}{\binom{n}{k}}$, който можем да извадим пред скоби. Получаваме дясната страна във вида

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{0 \le q \le k} \binom{n-q}{k-q}$$

Но от (2) знаем, че $\sum_{0 \le q \le k} \binom{n-q}{k-q} = \binom{n+1}{k}$. И така,

$$\frac{\binom{k}{q}}{\binom{n}{q}} = \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}$$

Но

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{n+1}{n+1-k}$$

С което доказахме (3).