3.4 Пълни формални системи. Теорема на Линденбаум

Ще казваме, че една формална система $\mathcal{F}$ е *пълна*, ако $\mathcal{F}$ е непротиворечива и

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \text{ или } \vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}$$

за всяка *затворена* формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$.

Твърдение 3.7. Нека $\mathcal{F}$ е пълна формална система и $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са затворени формули. Тогава

(i) $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A} \iff \nvdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$;

(ii) $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$ или $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}$.

Доказателство. Твърдение (i) следва директно от дефинициите за непротиворечивост и пълнота. За да докажем (ii) нека първо да забележим, че посоката отдясно-наляво следва от теоремата за тавтологиите. За обратната посока нека $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\nvdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$. Тогава съгласно (i) $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}$, откъдето $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B}$.

□

Теорема 3.8 (Линдебаум)**.** Нека $\mathcal{F}$ е непротиворечива формална система. Тогава съществува множество Γ от формули на $\mathcal{F}$, такова че $\mathcal{F}[\Gamma]$ е пълна. В частност всяка непротиворечива формална система има пълно разширение.

Доказателство. Нека първо $\mathcal{F}$ има изброимо много затворени формули $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, …, $\mathbf{A}_n$, … (такъв е случаят, ако $\mathcal{F}$ има краен брой или изброимо много нелогически символи). Дефинираме редица от множества $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_n \subseteq \dots$ с рекурсия по n. Полагаме

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \varnothing\\ \Gamma_{n+1} &= \begin{cases}\Gamma_n \cup \{\mathbf{A}_n\}, & \text{ако } \nvdash_{\mathcal{F}[\Gamma_n]} \neg\mathbf{A}_n,\\ \Gamma_n, & \text{иначе.}\end{cases}\end{aligned}$$

Нека $\Gamma = \bigcup \Gamma_n$. Първо ще докажем, че $\mathcal{F}[\Gamma]$ е непротиворечива. Предвид теоремата за редукцията за противоречивост достатъчно е да докажем, че $\mathcal{F}[\Gamma_n]$ е непротиворечива за всяко естествено n. Очевидно $\mathcal{F}[\Gamma_0]$ е непротиворечива. Нека сега $\mathcal{F}[\Gamma_n]$ е непротиворечива. Ако $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$, то $\mathcal{F}[\Gamma_{n+1}]$ е непротиворечива. В противен случай $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\mathbf{A}_n\}$ и $\nvdash_{\mathcal{F}[\Gamma_n]} \neg\mathbf{A}_n$. Оттук и следствието към теорема за редукцията за противоречивост $\mathcal{F}[\Gamma_{n+1}]$ е непротиворечива.

Остава да докажем, че $\mathcal{F}[\Gamma]$ е пълна. Нека $\mathbf{A}$ е затворена формула на $\mathcal{F}[\Gamma]$. Тогава $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_n$ за някое естествено n. Ако $\nvdash_{\mathcal{F}[\Gamma_n]} \neg\mathbf{A}_n$, то $\mathbf{A} \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}$. В противен случай $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma_n]} \neg\mathbf{A}$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \neg\mathbf{A}$.

В общия случай е необходимо да се възползваме от следната теорема, еквивалентна на аксиомата за избора.

Теорема 3.9 (Тайхмюлер – Тюке)**.** Нека $\mathcal{S}$ е фамилия с краен характер, т.е. $\mathcal{S}$ е множество от множества, такова че

$$X \in \mathcal{S} \iff X' \in \mathcal{S} \text{ за всяко крайно } X' \subseteq X.$$

Тогава $\mathcal{S}$ има максимален елемент по отношение на $\subseteq$.

Нека с $\mathcal{S}$ означим множеството от всички множества Δ от затворени формули на $\mathcal{F}$, такива че $\mathcal{F}[\Delta]$ е непротиворечива. Твърдим, че $\mathcal{S}$ е фамилия с краен характер. Наистина, ако $\Delta \in \mathcal{S}$, то $\Delta' \in \mathcal{S}$ за всяко крайно $\Delta' \subseteq \Delta$. Обратно, нека $\Delta' \in \mathcal{S}$ за всяко крайно $\Delta' \subseteq \Delta$. Да допуснем, че $\Delta \notin \mathcal{S}$, т.е. $\mathcal{F}[\Delta]$ е противоречива. Тогава съгласно теоремата за редукцията за противоречивост $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}_1 \vee \dots \vee \mathbf{A}_n$ за някои формули $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ от Δ (Δ се състои от затворени формули). Нека $\Delta' = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\}$. Тогава отново съгласно теоремаза за редукцията за противоречивост $\mathcal{F}[\Delta']$ е противоречива, което противоречи на предположението ни за Δ. Следователно $\mathcal{F}[\Delta]$ е непротиворечива и значи $\Delta \in \mathcal{S}$.

Нека Γ е максимален елемент на $\mathcal{S}$ по отношение на $\subseteq$ и да разгледаме $\mathcal{F}[\Gamma]$. Ясно е, че $\mathcal{F}[\Gamma]$ е непротиворечива. За да докажем, че $\mathcal{F}[\Gamma]$ е пълна нека разгледаме една затворена формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$ и нека $\nvdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \neg\mathbf{A}$. Тогава $\mathcal{F}[\Gamma \cup \{\mathbf{A}\}]$ е непротиворечива и значи $\Gamma \cup \{\mathbf{A}\} \in \mathcal{S}$. Но Γ е максимален елемент на $\mathcal{S}$ по отношение на $\subseteq$ и значи $\Gamma \cup \{\mathbf{A}\} = \Gamma$. Следователно $\mathbf{A} \in \Gamma$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}[\Gamma]} \mathbf{A}$. □