ТЕМА 13: ПЪЛНИ МНОЖЕСТВА

Дефиниция:

$$x^\sigma = \begin{cases} x & \text{ако } \sigma = 1 \\ \overline{x} & \text{ако } \sigma = 0 \end{cases}$$

Формула дизюнктивна нормална форма (ДНФ)

$\bigvee\limits_{i=1}^{p} K_i; \quad K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_{t_i}}^{\sigma_{t_i}}$

Пример : $\overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_3 x_4 \vee \overline{x}_4 x_1$

Формула съвършена дизюнктивна нормална форма (СвДНФ)

$\bigvee\limits_{i=1}^{p} K_i; \quad K_i = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$

Пример: $x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$

Формула конюнктивна нормална форма (КНФ)

$\bigwedge\limits_{i=1}^{p} D_i; \quad D_i = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_{i_{t_i}}^{\sigma_{t_i}}$

Пример: $(x_1 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)(x_2 \vee \overline{x}_4)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)$

Формула съвършена конюнктивна нормална форма (СвКНФ)

$\bigwedge\limits_{i=1}^{p} D_i; \quad D_i = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$

Пример: $(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$

Затворена обвивка на множество от булеви функции: $[F]$

Свойства на затворената обвивка: $\forall F \subseteq \mathcal{F}_2^n$

$F \subseteq [F]$

$F \subseteq G \Rightarrow [F] \subseteq [G]$

$[F] \cup [G] \subseteq [F \cup G]$

$[[F]] = [F]$

Затворено множество от булеви функции: $F = [F]$

Пълно множество от булеви функции: $[F] = \mathcal{F}_2$

Базис на множеството $\mathcal{F}_2$

Теорема на Бул: $[\{x \vee y, xy, \overline{x}\}] = \mathcal{F}_2$

$$\forall f \in \mathcal{F}_2 : f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{f(\widetilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}$$

$$\forall f \in \mathcal{F}_2 : f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{f(\widetilde{\sigma})=0} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma_n}})$$

Шеферова функция f: $[f] = \mathcal{F}_2$

Теорема Нека $F \subseteq \mathcal{F}_2$ е пълно множество, $G \subseteq \mathcal{F}_2$ и $\forall f \in F(f \in [G])$. Тогава и множеството G е пълно.

Задачи за упражнение:

Задача 1: Намерете СвДНФ на следните функции:

a) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2x_3$

<u>*Решение:*</u> Първо ще намерим стълба на функцията и тогава ще приложим формулата за СвДНФ.

$f(x_1, x_2, x_3) = (11010001)$

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3$

b) $f(\widetilde{x}^3) = (01101100)$

c) $f(\widetilde{x}^4) = (0001110110011011)$

d) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x_1\overline{x}_2 \rightarrow \overline{x}_3}$

e) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1|x_2)\overline{x}_3$

f) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \equiv (x_2 \equiv x_3)$

g) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$

h) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 \rightarrow ((x_2x_3 \rightarrow \overline{x}_4) \rightarrow \overline{x}_2)\overline{x}_3$

i) $f(\widetilde{x}^4) = ((x_1|x_2) \downarrow x_3)|(x_2|\overline{x}_4)$

j) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \oplus x_2)(x_3 \rightarrow x_2\overline{x}_4)$

Задача 2: Преминете от ДНФ към СвДНФ:

a) $D(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x}_2x_3$

b) $D(\widetilde{x}^3) = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_3$

c) $D(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3$

<u>*Решение:*</u>

$$f(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3 =$$
$$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 =$$
$$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$$

d) $D(\widetilde{x}^4) = \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_4x_1$

e) $D(\widetilde{x}^4) = x_1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3x_4$

Задача 3: Да се намери броят на булевите функции на n променливи, за които СвКНФ е и ДНФ.

<u>*Решение:*</u> Искаме формулата СвКНФ, която е конюнкция от пълни дизюнкции, да бъде същевременно ДНФ, т.е. дизюнкция от конюнкции.

$$\mathcal{K} = \bigwedge_{f(\widetilde{\sigma})=0} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma_n}})$$

Това е възможно само ако в СвКНФ има единствена дизюнкция, т.е. тя изглежда така:

$$\mathcal{K} = x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$$

Това от своя страна означава, че функцията става 0 върху един единствен вектор от дефиниционното си множество и това е векторът $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

Броят на булевите функции на n променливи, които имат стойност 0 в един елемент на дефиниционното си множество е 2^n.

Задача 4: Да се намери броят на булевите функции на n променливи, чиято СвДНФ изпълнява условието:

a) Няма елементарна конюнкция, в която броят на буквите с отрицание е равен на броя на буквите без отрицание;

b) Всяка елементарна конюнкция има поне две отрицания;

c) Всяка елементарна конюнкция има четен брой букви с отрицания.

Задача 5: Под дължина на СвДНФ на една функция се разбира броят на конюнкциите, които участват в дизюнкцията, а този брой се определя от мощността на единичното множество на функцията $|T_f|$.

Да се намери дължината на СвДНФ на следната функция:

a) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n$

b) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee ... \vee \overline{x}_n)$

c) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \oplus x_4 \oplus ... \oplus x_n$

d) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{i<j} x_i x_j$

e) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to ...(x_{n-1} \to x_n)...)$

f) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \to x_3...x_n$

Задача 6: Дадени са множествата $X^n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y^m = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, $X^n \cap Y^m = \emptyset$. Нека дължината на СвДНФ на функцията $f(\widetilde{x}^n)$ е k, а дължината на СвДНФ на функцията $g(\widetilde{y}^m)$ е l. Да се намери дължината на СвДНФ на следната функция:

a) $f(\widetilde{x}^n) \wedge g(\widetilde{y}^m)$

b) $f(\widetilde{x}^n) \vee g(\widetilde{y}^m)$

c) $f(\widetilde{x}^n) \oplus g(\widetilde{y}^m)$

Задача 7: Проверете пълни ли са следните множества от булеви функции:

a) $\{x \wedge y, \overline{x}\}$

Решение: $x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$

b) $\{x|y\}$

Решение: $\overline{x} = x|x$; $x \vee y = (x|x)|(y|y)$

c) $\{x \downarrow y\}$

Решение: $\overline{x} = x \downarrow x$; $x \wedge y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

d) $\{x \wedge y, x \oplus y, \widetilde{1}\}$

Решение: $\overline{x} = x \oplus 1$

e) $\{xy \oplus z, (x \equiv y) \oplus z\}$

Решение: $xx \oplus x = x \oplus x = \widetilde{0}$; $xy \oplus \widetilde{0} = xy$; $(x \equiv x) \oplus x = 1 \oplus x = \overline{x}$

f) $\{x \to y, (01101011)\}$

Полиноми на Жегалкин - дефиниция: Формула над множеството от функции $\{\widetilde{0}, \widetilde{1}, xy, x \oplus y\}$

Пример:

$P(x, y) = xy \oplus y \oplus 1$

$P(\widetilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2$

$P(\widetilde{x}^4) = x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_2x_3x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus 1$

Всяка булева функция има единствен полином на Жегалкин

Степен на ПЖ. Дължина на ПЖ.

Построяване на полином на Жегалкин за произволна булева функция:

А) По метода на неопределените коефициенти;

Б) Чрез еквивалентни преобразования на формули;

В) От СвДНФ.

Задачи за упражнение:

Задача 1: Намерете булева функция на n променливи, чийто ПЖ е с дължина 2^n пъти по-голяма от дължината на нейната СвДНФ.

Задача 2: Намерете броя на различните ПЖ на n променливи с дължина k, които стават 0 на векторите $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$.

Задача 3: Намерете броя на монотонните елементарни конюнкции от ранг r над множеството променливи $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Задача 4: Намерете броя на полиномите от степен r над множеството променливи $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Задача 5: Намерете дължината на СвДНФ на функцията, зададена със следния ПЖ:

a) $P(\widetilde{x}^n) = x_1...x_k \oplus x_{k+1}...x_n$

b) $P(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3 \oplus ... \oplus x_1x_2...x_n$

Задача 6: Да се построи ПЖ за следната функция по метода на неопределените коефициенти:

a) $f(\widetilde{x}^2) = (0110)$

b) $f(\widetilde{x}^2) = (1001)$

c) $f(\widetilde{x}^2) = (0001)$

d) $f(\widetilde{x}^2) = (0111)$

e) $f(\widetilde{x}^2) = (1101)$

f) $f(\widetilde{x}^3) = (11111000)$

g) $f(\widetilde{x}^3) = (01101000)$

Решение: Общият вид на полином на Жегалкин на три променливи е:

$P(\widetilde{x}^3) = a_0 \oplus a_1x_3 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_2x_3 \oplus a_4x_1 \oplus a_5x_1x_3 \oplus a_6x_1x_2 \oplus a_7x_1x_2x_3$

Съставяме система от осем уравнения за да намерим осемте коефициента в полинома.

$0 = a_0 \quad \Rightarrow a_0 = 0$
$1 = a_0 \oplus a_1 \quad \Rightarrow a_1 = 1$
$1 = a_0 \oplus a_2 \quad \Rightarrow a_2 = 1$
$0 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \quad \Rightarrow a_3 = 0$
$1 = a_0 \oplus a_4 \quad \Rightarrow a_4 = 1$
$0 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_4 \oplus a_5 \quad \Rightarrow a_5 = 0$
$0 = a_0 \oplus a_2 \oplus a_4 \oplus a_6 \quad \Rightarrow a_6 = 0$
$0 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \quad \Rightarrow a_7 = 1$

Така полиномът на функцията има следния вид:

$P(\widetilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

Задача 7: Като се използват еквивалентни преобразования да се получи ПЖ на функцията, представена със следната формула:

a) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1|x_2) \downarrow x_3$

b) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \downarrow x_3)$

c) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \to x_2) \vee x_3)|x_1$

Задача 8: Да се построи ПЖ като се използва СвДНФ на следната функция:

a) $f(\widetilde{x}^2) = (1101)$

b) $f(\widetilde{x}^3) = (10100100)$

Решение:

$f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 =$
$(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus (x_1 \oplus 1)x_2(x_3 \oplus 1) \oplus x_1(x_2 \oplus 1)x_3 =$
$x_1x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus 1$

c) $f(\widetilde{x}^4) = (1000110110100011)$

Задача 9: Да се намери полиномът на Жегалкин на функцията, зададена със следната формула:

a) $f(x, y) = x \vee y$ b) $f(\widetilde{x}^3) = (01101011)$

c) $f(x, y, z) = (x|y) \downarrow z$ d) $f(x, y, z) = (x \to y)(y \downarrow z)$

e) $f(x, y, z) = ((x \to y) \vee \overline{z})|x$ f) $f(x, y, z) = (10010010)$