Глава 3

Числени методи за гранични задачи за ОДУ от втори ред

3.1 Гранична задача от втори ред

Разглеждаме задачата:

$$
\begin{aligned}
-(p(t)u'(t))' + q(t)u(t) = f(t),\\
u(0) = \mu_1,\ u(L) = \mu_2.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Това е една **гранична задача** за ОДУ от втори ред. Както споменахме по-рано, за да получим единствено решение, трябва да са наложени две допълнителни условия за функцията. В тази задача са наложени две условия в краищата на интервала, в който решаваме задачата. Тези условия се наричат гранични условия. Има различни видове гранични условия – от първи, втори и трети род. В случая сме избрали гранични условия от първи род (условия за стойностите на функцията). По-нататък ще разгледаме условия от втори и трети род.

Общият вид на ОДУ от втори ред е следният:

$$a_0 u''(t) + a_1 u'(t) + a_2 u(t) = b(t),$$

където a_0, a_1, a_2 са дадени (не задължително константни) коефициенти. Това уравнение чрез известни преобразувания може да се доведе до по-горе представения вид (допълнителна информация по темата може да се намери в [3]).

Въвеждаме равномерна мрежа

$$\overline{\omega}_h = \{t_i = t_0 + ih,\ i = \overline{0, n},\ n = (T - t_0)/h\}.$$

Ще търсим приближените стойности на решението именно в точките от тази мрежа.

3.1.1 Апроксимиране на втора производна

Разглеждайки задачи от втори ред, е ясно, че трябва да можем да апроксимираме втори производни. За целта ще използваме следното приближение:

$$u''(t) \approx \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2}. \tag{3.2}$$

Това приближение внася грешка $O(h^2)$. Ще изведем последната формула, като използваме формулите (??) и (??):

$$\begin{aligned} u''(t) = (u'(t))' \approx \frac{u'(t+h) - u'(t)}{h} \approx \frac{1}{h}\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \frac{u(t)-u(t-h)}{h}\right) \\ = \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Грешката при използване на тази формула се получава по следния начин:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= u''(t) - \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2} \\ &= u''(t) - \frac{1}{h^2}\left(u(t) + u'(t)h + u''(t)\frac{h^2}{2!} + u'''(t)\frac{h^3}{3!} + u''''(t)\frac{h^4}{4!} - 2u(t) + \right. \\ &\qquad \left. + u(t) - u'(t)h + u''(t)\frac{h^2}{2!} - u'''(t)\frac{h^3}{3!} + u''''(t)\frac{h^4}{4!} + O(h^5)\right) \\ &= -\frac{u''''(t)h^2}{12} + O(h^3) = O(h^2). \end{aligned}$$

3.1.2 Числено решаване на гранични задачи за ОДУ от втори ред

За да решим задачата (3.1), ще приближим лявата страна на (3.1), като използваме формули за числено диференциране за всички вътрешни точки от мрежата, а в граничните точки ще използваме граничните условия. По този начин ще получим една линейна система от $n+1$ уравнения с $n+1$ неизвестни, която бихме могли да решим. Ще изложим идеята върху следния пример.

Задача 1. Да се реши граничната задача за ОДУ от втори ред:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2} = 9.8 - u, \ t \in (0, 10), \\ &u(0) = 0, \\ &u(10) = 10. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Решение. Въвеждаме мрежа $\overline{\omega}_h = \{t_i = ih, \ i = \overline{0,n}, \ n = 10/h\}$. Нека да означим търсеното приближено решение в момент t_i с y_i, тогава за граничните условия имаме следното $y_0 = 0$, $y_n = 10$. Остава да апроксимираме дифенциалното уравнение. Това може да стане по следния начин:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 9.8 - y_i, \ i = \overline{1, n-1}.$$

Така получаваме следната система:

$$\begin{aligned} &y_0 = 0, \\ &\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 9.8 - y_i, \ i = \overline{1, n-1}, \\ &y_n = 10. \end{aligned}$$

Тя може да се запише в следния векторно-матричен вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & 1-\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & 1-\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h^2} & 1-\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ \cdots \\ 9.8 \\ 10 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Като решим тази линейна алгебрична система, получаваме търсеното приближено решение. Прилагаме примерна имплементация, като за решаване на системата използваме вградената функция *LinearSolve*.

```
Clear[x, t];
exact[t_] = x[t] /. DSolve[{x''[t] == 9.8 - x[t], x[0] == 0, x[1] == 10}, x[t], t][[1]];
h = 0.001;
t = Table[i*h, {i, 0, 1/h}];
n = Ceiling[1/h];
b = Table[9.8, {i, 1, n + 1}];
b[[1]] = 0;
b[[n + 1]] = 10;

A = Table[Table[0, {i, 0, n}], {j, 0, n}];
For[i = 2, i ≤ n, i++,
      A[[i, i - 1]] = 1/h^2;
      A[[i, i]] = 1 - 2/h^2;
      A[[i, i + 1]] = 1/h^2
 ];

A[[1, 1]] = 1;
A[[n + 1, n + 1]] = 1;
apprPos = LinearSolve[A, b];
Animate[Graphics[{ballSpring[exact[t[[i]]], 4.5],
                              ballSpring[apprPos[[i]], 5.5]},
                             PlotRange → {{0, 10}, {-22, 0}}, Axes → True],
         {i, 1, Length[t], 1}]
```

□

Нека сега видим какво се случва, ако граничните условия са от втори род.

Задача 2. Да се реши граничната задача за ОДУ от втори ред:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dt^2} = 9.8 - u, \ t \in (0, 10), \\ &u(0) = 0, \\ &u'(10) = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Решение. Единствената разлика между предишната и тази задача е в дясното гранично условие. В случая е поставено гранично условие от втори род, т.е. условие за производната на функцията. То означава, че скоростта на топчето в момент от време 10 е 0. Това означава, че единствената разлика със системата

(3.5) ще бъде в последното ѝ уравнение. Бихме могли да го получим, като апроксимираме дясното гранично условие с разлика назад:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = 0 \tag{3.7}$$

Това означава, че трябва да променим един единствен ред (последния) в матрицата на системата (3.5). Прилагаме примерен код за задачата:

```
In[222]:= Clear[x, t];

exact[t_] = x[t] /. DSolve[{x''[t] == 9.8 - x[t], x[0] == 0, x'[1] == 0}, x[t], t][[1]];
h = 0.1;
t = Table[i * h, {i, 0, 1 / h}];
n = Ceiling[1 / h];
b = Table[9.8, {i, 1, n + 1}];
b[[1]] = 0;
b[[n + 1]] = 0;

A = Table[Table[0, {i, 0, n}], {j, 0, n}];
For[i = 2, i ≤ n, i++,
      A[[i, i - 1]] = 1 / h^2;
      A[[i, i]] = 1 - 2 / h^2;
      A[[i, i + 1]] = 1 / h^2
 ];

A[[1, 1]] = 1;
A[[n + 1, n]] = -1;
A[[n + 1, n + 1]] = 1;
apprPos = LinearSolve[A, b];
ballSpring[pos_, x_] := {Circle[{x, -pos}, 0.5], Line[{{x, -pos}, {x, 10}}]}
Animate[Graphics[{ballSpring[exact[t[[i]]], 4.5],
                                          ballSpring[apprPos[[i]], 5.5]},
                                         PlotRange → {{0, 10}, {0, 11}}, Axes → True],
            {i, 1, Length[t], 1}]
```

Съществен недостатък на реализираната числена схема обаче е фактът, че апроксимацията (3.7) има ЛГА $O(h)$. Следователно можем да очакваме само първи ред на сходимост за цялата схема, независимо от това, че сме апроксимирали основното ДУ с грешка $O(h^2)$. Ще покажем как може да бъде преодолян този проблем. Вземайки предвид, че (3.7) има ЛГА $O(h)$, можем да запишем следното равенство

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = 0 + O(h).$$

Бихме могли обаче да развием остатъчния член $O(h)$ и да получим за него вида $\diamond + O(h^2)$. Ако го направим, то последното уравнение би добило вида

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = 0 + \diamond + O(h^2)$$

или

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} - \diamond = 0 + O(h^2)$$

и следователно диференчното уравнение

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} - \diamond = 0 \tag{3.8}$$

ще апроксимира дясното гранично условие с ЛГА $O(h^2)$. Остатъчният член $O(h)$, който искаме да представим в друг вид, е всъщност ЛГА. Нека я разпишем, като развием в ред на Тейлър около $t = t_n$:

$$\begin{aligned}\psi_{h,\tau} &= \frac{u_n - u_{n-1}}{h} - u'_n = \frac{u_n - \left(u_n - u'_n h + u''_n \frac{h^2}{2} + O(h^3)\right)}{h} - u'_n \\ &= -\frac{h}{2} u''_n + O(h^2).\end{aligned}$$

И така, получихме представяне на ЛГА в желания вид. Тогава, ако заместим $\diamond$ с $-\frac{h}{2}u''_n$ (по-точно, апроксимацията на последното) в лявата страна на (3.8), ще получим апроксимация с втори ред на точност. Проблемът обаче е, че по абсолютно същата причина, поради която не можахме да използваме формулата с централна разлика за апроксимация на производната от първи ред, не можем да апроксимираме и втората производна. За да решим този проблем правим едно съществено допускане, а именно – че основното диференциално уравнение е изпълнено и при $t = t_n$, т.е. $u''_n = 9.8 - u_n$. Това допускане е обосновано, тъй като физическите процеси имат достатъчно гладко поведение и следователно фактът, че уравнението е изпълнено върху отворения интервал, ни дава основание да приемем, че в граничните точки също е изпълнено с достатъчно малка грешка.

Така получаваме следната апроксимация на граничното условие с грешка $O(h^2)$:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{h}{2}(9.8 - y_n) = 0.$$

Съответната линейна алгебрична система, която трябва да се реши, е

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & 1-\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & 1-\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h^2} & 1-\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h}-\frac{h}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9.8 \\ 9.8 \\ \cdots \\ 9.8 \\ -\frac{h}{2}9.8 \end{pmatrix}.$$

$\square$

3.2 Метод на дясната прогонка за решаване на линейни системи

Граничните задачи от втори ред водят до решаване на линейни системи. Матриците на тези системи са със специална структура – те са тридиагонални матрици. Ако не се възползваме от тази структура и използваме например метода на Гаус бихме направили от порядъка на $O(n^3)$ операции. Бихме могли да ускорим много кода, ако имплементираме например метода на дясната прогонка. Нека да разгледаме системата:

$$\begin{aligned} - C_0 y_0 + B_0 y_1 &= F_0, \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= F_i, \qquad i = \overline{1, N-1}, \\ A_N y_{N-1} - C_N y_n \qquad &= F_N. \end{aligned}$$

От първото уравнение бихме могли да изразим например y_0 спрямо y_1:

$$y_0 = -\frac{F_0}{C_0} + \frac{B_0}{C_0} y_1.$$

Нека да означим с $\alpha_1 = \frac{B_0}{C_0}$ и $\beta_1 = -\frac{F_0}{C_0}$. Тогава

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1.$$

Ако заместим намерения израз за y_0 в уравнението

$$A_1 y_0 - C_1 y_1 + B_1 y_2 = F_1,$$

то получаваме:

$$\begin{aligned} A_1(\alpha_1 y_1 + \beta_1.) - C_1 y_1 + B_1 y_2 = F_1, \\ y_1 = \underbrace{\frac{F_1 - A_1\beta_1}{A_1\alpha_1 - C_1}}_{\beta_2} + \underbrace{\frac{-B_1}{A_1\alpha_1 - C_1}}_{\alpha_2} y_2. \end{aligned}$$

Аналогично

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1},\ i = \overline{0, N-1}, \tag{3.9}$$

където

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i},\ \beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i - F_i}{C_i - A_i\alpha_i}. \tag{3.10}$$

За последното уравнение имаме

$$A_N y_{N-1} - C_N y_N = F_N \tag{3.11}$$

$$y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N. \tag{3.12}$$

Оттук бихме могли да намерим y_N, тъй като имаме две уравнения с две неизвестни. Получаваме следното:

$$y_N = \frac{A_N\beta_N - F_N}{C_N - A_N\alpha_N}. \tag{3.13}$$

Сега накратко ще синтезираме алгоритъма:

1. Намираме $\alpha_1 = \frac{B_0}{C_0},\ \beta_1 = -\frac{F_0}{C_0}$

2. Пресмятаме последователно за $i = 1, 2, \cdots N$ $\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}$ и $\beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i - F_i}{C_i - A_i\alpha_i}$.

3. $y_N = \frac{A_N\beta_N - F_N}{C_N - A_N\alpha_N}$

4. Пресмятаме в обратен ред търсените неизвестни $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$ за $i = N-1, N-2, \cdots 0$.

Библиография

[1] J. Butcher, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Wiley, 2nd edition, 2009.

[2] E. Coddington, An Introduction to Ordinary Differential Equations. Dover Publications, Unabridged edition, 1989.

[3] С. Димова, Т. Черногорова, А. Йотова, Числени методи за диференциални уравнения. Университетско издателство “Св. Климент Охридски”, София, 2010.

[4] J. Hale, Ordinary Differential Equations. Dover Publications, 2009.

[5] M. Hirsh, S. Smale, R. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. Academic Press, 3rd edition, 2012.

[6] M.H. Holmes, Introduction to Numerical Methods in Differential Equations. Springer, 2007.

[7] J. Murray, Mathematical Biology I. An Introduction. Springer, 3rd edition, 2002.

[8] M. Tenenbaum, H. Pollard, Ordinary Differential Equations. Dover Publications, Revised ed., 1985.