3.9 Нестандартни модели на аритметиката

С $T_1(\mathbb{N})$ ще означаваме формалната система с език $\mathcal{L}(PA)$, която има за нелогически аксиоми всички формули $\mathbf{A}$, за които $\mathbb{N} \models \mathbf{A}$. Нека κ е нова константа и $\mathcal{F}$ се получава от $T_1(\mathbb{N})$, добавяйки κ. Нека $\Gamma \equiv \{\kappa \neq \overline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (с $\overline{n}$ означаваме терма $\underbrace{SS\ldots S}_{n}0$). Ще докажем, че $\mathcal{F}[\Gamma]$ има модел. За целта нека $\Gamma' \subseteq \Gamma$ е крайно множество. Нека n_0 е естествено число, такова че ако $\kappa \neq \overline{i} \in \Gamma'$, то $i < n_0$. Нека с $\mathbb{N}_{n_0}$ означим структурата, която се получава от $\mathbb{N}$, добавяйки интерпретацията

$$\mathbb{N}_{n_0}(\kappa) \equiv n_0.$$

Тогава $\mathbb{N}_{n_0} \models \mathcal{F}$. Освен това, за всяко $i < n_0$ имаме

$$\mathbb{N}_{n_0} \models \kappa \neq \overline{i}$$

и следователно $\mathbb{N}_{n_0} \models \mathcal{F}[\Gamma']$. Оттук и теоремата за компактност $\mathcal{F}[\Gamma]$ има модел и значи е непротиворечива. Тъй като $\mathcal{F}$ не може да има крайни модели, то $\mathcal{F}[\Gamma]$ има безкраен модел и следователно, съгласно теоремата на Льовенхайм-Скулем, $\mathcal{F}[\Gamma]$ има изброим модел $\mathfrak{A}'$. Нека $\mathfrak{A}$ е обедняването на $\mathfrak{A}'$ до езика $\mathcal{L}(PA)$. Тогава $\mathfrak{A} \models T_1(\mathbb{N})$. Да допуснем, че $\mathbb{N} \cong \mathfrak{A}$ и нека $\varphi : \mathbb{N} \to |\mathfrak{A}|$ е изоморфизъм. Нека $\alpha \in |\mathfrak{A}|$ е такъв, че $\alpha = \mathfrak{A}'(\kappa)$. Нека $\varphi(n) \equiv \alpha$. Тъй като $\mathbb{N}(\overline{n}) \equiv n$ и φ е изоморфизъм, то $\mathfrak{A}(\ltimes) \equiv \alpha$ и значи $\mathfrak{A}'(\overline{n}) \equiv \alpha$. Но тогава $\mathfrak{A}' \models \kappa = \overline{n}$, което противоречи на $\mathfrak{A}' \models \mathcal{F}[\Gamma]$. Следователно $\mathbb{N} \ncong \mathfrak{A}$.

Дефиниция 3.19. Нестандартен модел на аритметиката наричаме всеки изброим модел на $T_1(\mathbb{N})$, който не е изоморфен на $\mathbb{N}$.

Нека $\mathbf{N}$ е нестандартен модел на аритметиката. Нека

$$N_0 \equiv \{\mathbf{N}(\overline{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Тъй като $\mathbb{N} \models S\overline{n} = \overline{n+1}$, $\mathbb{N} \models \overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$ и $\mathbb{N} \models \overline{n}.\overline{m} = \overline{nm}$, то N_0 е затворено относно операциите $S_{\mathbf{N}}$, $+_{\mathbf{N}}$ и $._{\mathbf{N}}$. Следователно $\mathbf{N}$ има подструктура с носител N_0. При това, тъй като $\mathbb{N} \models \overline{n} \neq \overline{m}$ за $n \neq m$ и

$$m < n \iff \mathbb{N} \models \overline{m} < \overline{m},$$

то изображението $\varphi : \mathbb{N} \to N_0$, действащо по правилото $\varphi(n) \equiv \mathbf{N}(\overline{n})$ е изоморфизъм и значи $\mathbf{N}$ има подструктура $\mathbf{N}_0$, изоморфна на $\mathbb{N}$. Елементите на $\mathbf{N}_0$ наричаме стандартни, а останалите елементи на $\mathbf{N}$ — нестандартни. Нека $\alpha \in \mathbf{N}$ е нестандартен елемент. Тъй като

$$\mathbb{N} \models x \nless 0$$

$$\mathbb{N} \models x < \overline{n+1} \to (x = 0 \vee \cdots \vee x = \overline{n}),$$

то $\beta <_{\mathbf{N}} \alpha$ за всеки стандартен елемент β. Следователно всички нестандартни елементи са по-големи от всеки стандартен елемент на $\mathbf{N}$.

За всеки нестандарте елемент α е в сила $\alpha <_{\mathbf{N}} S_{\mathbf{N}}(\alpha)$ (защото $\mathbb{N} \models x < Sx$), като между α и $S_{\mathbf{N}}(\alpha)$ няма елементи (защото $\mathbb{N} \models \neg\exists y(x < y \ \&\ y < Sx)$). Ясно е, че $S_{\mathbf{N}}(\alpha)$ е нестандартен. Освен това съществува α', такова че $\alpha \equiv S_{\mathbb{N}}(\alpha')$ (защото $\mathbb{N} \models x \neq 0 \to \exists y(x = Sy)$). Така всеки нестандартен елемент генерира $\mathbb{Z}$-верига от нестандартни елементи. Нека H е двуместна операция определена с аксиомата

$$Hx = y \leftrightarrow \exists z(x = \overline{2}.y \vee x = \overline{2}.y + \overline{1}).$$

За $\mathbb{N}$ е в сила, че $H_{\mathbb{N}}(n)$ е цялата част на $\frac{n}{2}$. Тъй като $\mathbb{N} \models x \neq 0 \to Hx < x$, то $H_{\mathbf{N}}(\alpha)$ е нестандартен елемент, който е по-малък от α и не е от $\mathbb{Z}$ веригата на нестандартния елемент α. Също така $\mathbf{N}(\overline{2}).{}_{\mathbf{N}}\alpha$ е нестандартен елемент, който е по-голям от α и не е от $\mathbb{Z}$ веригата на нестандартния елемент α. Освен това, ако $\alpha <_{\mathbf{N}} \beta$ са нестандартни елементи от различни $\mathbb{Z}$-вериги, то $\alpha <_{\mathbf{N}} H_{\mathbf{N}}(\alpha + \mathbf{N}\beta) <_{\mathbf{N}} \beta$, като $H_{\mathbf{N}}(\alpha +_{\mathbf{N}} \beta)$ не е нито от $\mathbb{Z}$ веригата на α, нито на тази на β. Следователно $\mathbb{Z}$ веригите на нестандартните елементи образуват гъсто наредено множество без най-малък и най-голям елемент. Така доказахме следната теорема.

Теорема 3.20. Нека $\mathbf{N}$ е нестандартен модел на аритметиката. Тогава наредбата на в $\mathbf{N}$ е от тип $\mathbb{N} + \mathbb{Q}.\mathbb{Z}$.