3.6 Теорема за компактност

Теорема 3.15 (Теорема за компактност)**.** Нека $\mathcal{F}$ е формална система и Γ е множество от формули на $\mathcal{F}$. Тогава $\mathcal{F}[\Gamma]$ има модел тогава и само тогава, когато $\mathcal{F}[\Gamma']$ има модел за всяко крайно $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Доказателство. Посоката отляво-надясно е очевидна. За обратната посока нека предположим, че $\mathcal{F}[\Gamma]$ няма модел. Тогава съгласно теоремата за пълнота, $\mathcal{F}[\Gamma]$ е противоречива. Оттук и теоремата за редукцията за противоречивост

$$\vdash_{\mathcal{F}} \neg \mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \neg \mathbf{A}_k,$$

където $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ са универсални затваряния съответно на формулите $\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_k \in \Gamma$. Нека $\Gamma' = \{\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_k\}$. Отново, предвид теоремата за редукцията за противоречивост, имаме $\mathcal{F}[\Gamma']$ е противоречива и следователно, съгласно теоремата за валидност, $\mathcal{F}[\Gamma']$ няма модел.

□

3.7 Теорема на Льовенхайм-Скулем

Ще казваме, че един език от първи ред е краен, ако той съдържа само краен брой нелогически символи. Ще казваме, че езикът е изброим, ако той съдържа изброимо много нелогически символи. Нека сега $\mathcal{F}$ е формлана система с краен или изброим език. Тогава $\mathcal{F}$ има изброимо много затворени формули от вида $\exists \mathbf{x} \mathbf{A}$ и следователно $\mathcal{F}$ има изброимо много специални константи. Не сега предположим, че $\mathcal{F}$ е непротиворечива. Съгласно доказателството на теоремата за пълнота (първи вариант) $\mathcal{F}$ има модел $\mathfrak{A}$, който е обедняването на стандартната структура $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}''}$, където $\mathcal{F}''$ е пълното разширение на хенкиново разширение $\mathcal{F}'$ на $\mathcal{F}$. Съгласно доказателството на твърдението за хенкиновите разширения $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$ се получава от $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, добавяйки специалните константи. Следователно $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$ е изброим и съдържа изброимо много константи, и в частност — изброимо много затворени термове. Съгласно доказателството на теоремата на Линденбаум, можем да считаме, че $\mathcal{L}(\mathcal{F}'') \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}')$. Следователно множеството $\mathcal{C}_{\mathcal{F}''}$ (от затворени термове на $\mathcal{F}''$) е изброимо и следователно носителят $|\mathfrak{A}| \equiv |\mathfrak{A}_{\mathcal{F}''}| \equiv \mathcal{C}_{\mathcal{F}''}/\sim$ е най-много изброим (т.е. краен или изброим). Следователно, ако $\mathcal{F}$ е непротиворечива формална система с краен или изброим език, то $\mathcal{F}$ има модел с най-много изброим носител.

Теорема 3.16 (Льовенхайм–Скулем)**.** Нека формалната система $\mathcal{F}$ има краен или изброим език. Тогава, ако $\mathcal{F}$ има безкраен модел, то $\mathcal{F}$ има изброим модел.

Доказателство. Нека $\mathfrak{A}$ е безкраен модел на $\mathcal{F}$. Нека κ_i за $i \geqslant 0$ са нови константи и нека $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки тези константи. Нека $\Gamma \equiv \{\kappa_i \neq \kappa_j \mid i < j\}$. Да разгледаме едно крайно $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Нека n_0 е такова, че ако $\kappa_i \neq \kappa_j \in \Gamma'$, то $i < j < n_0$. Да фиксираме различни $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n_0} \in |\mathfrak{A}|$. Да разгледаме структурата $\mathfrak{A}'$ за $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$, която има същия носител като $\mathfrak{A}$, интерпретира символите на $\mathcal{F}$ по същия начин като $\mathfrak{A}$ и

$$\mathfrak{A}'(\kappa_i) \equiv \begin{cases} \alpha_i, & i < n_0 \\ \alpha_{n_0}, & i \geqslant n_0. \end{cases}$$

Тогава $\mathfrak{A}$ е обедняването на $\mathfrak{A}'$ до $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ и следователно $\mathfrak{A}' \models \mathcal{F}'$. От друга страна, ако $i < j < n_0$, то

$$\mathfrak{A}'(\kappa_i) \equiv \alpha_i \not\equiv \alpha_j \equiv \mathfrak{A}'(\kappa_j)$$

и значи

$$\mathfrak{A}' \models \kappa_i \neq \kappa_j.$$

Следователно $\mathfrak{A}' \models \mathcal{F}'[\Gamma']$. Оттук и теоремата за компактност следва, че $\mathcal{F}'[\Gamma]$ има модел. Тъй като езикът на $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е изброим, то $\mathcal{F}'[\Gamma]$ има най-много изброим модел $\mathfrak{B}'$. Но формулите от Γ не може да са едновременно верни в крайна структура и следователно $\mathfrak{B}'$ е изброим. Нека $\mathfrak{B}$ е обедняването на $\mathfrak{B}'$ до $\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Тогава $\mathfrak{B}$ е изброим модел на $\mathcal{F}$.

□

3.8 ω-категоричност

Ще казваме, че формалната система $\mathcal{F}$ е ω-категорична, ако всеки два изброими модела на $\mathcal{F}$ са изоморфни.

Теорема 3.17. Нека $\mathcal{F}$ е непротиворечива формална система с краен или изброим език, която има само безкрайни модели. Тогава, ако $\mathcal{F}$ е ω-категорична, то $\mathcal{F}$ е пълна.

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ е затворена формула на $\mathcal{F}$ и да допуснем, че $\nvdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$ и $\nvdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}$. Тогава $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ и $\mathcal{F}[\neg\mathbf{A}]$ са непротиворечиви и следователно имат модели. При това, тъй като всеки модел на $\mathcal{F}[\Gamma]$ е модел на $\mathcal{F}$, то моделите на $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ и $\mathcal{F}[\neg\mathbf{A}]$ са безкрайни. Оттук и теоремата на Льовенхайм-Скулем $\mathcal{F}[\mathbf{A}]$ и $\mathcal{F}[\neg\mathbf{A}]$ имат изброими модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. От ω категоричността на $\mathcal{F}$ следва, че $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ и значи в двете структури са верни едни и същи формули. Но $\mathfrak{A} \models \mathbf{A}$, а $\mathfrak{B} \models \neg\mathbf{A}$, което е противоречие. Следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$ или $\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}$.

□

Нека DLO е формалната система, имаща един единствен нелогически символ $<$ (двуместен предикатен) и аксиоми

O1. $x \nless x$;

O2. $x < y \to y < z \to x < z$;

L. $x < y \vee x = y \vee y < x$;

D. $x < y \to \exists z(x < z \,\&\, z < y)$;

M1. $\exists x(x < y)$;

M2. $\exists y(x < y)$.

Първите две аксиоми са аксиомите за строга наредба. Трета аксиома, казва че всеки два елемента са сравними, т.е. че наредбата е линейна. Четвъртата аксиома, казва че между всеки два елемента има трети елемент (наредбата е гъста). Последните две аксиоми казват, че в наредбата няма минимален и максимален елемент. Моделите на DLO се наричат гъсти линейни наредби без най-малък и най-голям елемент. Ясно е, че $\mathbb{Q} \models DLO$ и следователно DLO е непротиворечива. Лесно се вижда, DLO има само безкрайни модели.

Теорема 3.18 (Кантор)**.** Всеки две изброими гъсти линейни наредби без най-малък и най-голям елемент са изоморфни.

Доказателство. Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са изброими модели на DLO и нека $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ и $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ са изреждания съответно на $|\mathfrak{A}|$ и $\mathfrak{B}$. Ще построим изображение $\varphi : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ на стъпки $n \geqslant 0$. На стъпка 0 полагаме $\varphi(\alpha_0) \equiv \beta_0$. Нека сега сме завършили стъпка $n-1$, като сме дефинирали φ в елементите $\alpha_{i_1} <_{\mathfrak{A}} \cdots <_{\mathfrak{A}} \alpha_{i_n}$, като $\beta_{j_1} <_{\mathfrak{B}} \cdots <_{\mathfrak{B}} \beta_{j_n}$, където $\varphi(\alpha_{i_s}) \equiv \beta_{j_s}$ за $1 \leqslant s \leqslant n$. Разглеждаме стъпка n. Нека първо n е нечетно. Нека k е най-малкото естествено число, за което $\varphi(\alpha_k)$ не е дефинирано. Нека $0 \leqslant p \leqslant n$ е такова, че $\alpha_{i_p} <_{\mathfrak{A}} \alpha_k <_{\mathfrak{A}} \alpha_{i_{p+1}}$ (ако α_k е по-малко от всички точки, в които φ е дефинирано, то $p = 0$ и е в сила само второто неравенство, а ако α_k е по-голямо от всички точки, в които φ е дефинирано, то $p = n$ и е в сила само първото неравенство). Нека сега l е най-малкото естествено число, за което $\beta_{j_p} <_{\mathfrak{B}} \beta_l <_{\mathfrak{B}} \beta_{j_{p+1}}$. Полагаме $\varphi(\alpha_k) \equiv \beta_l$.

Нека сега n е четно. Нека l е най-малкото, за което β_l не е образ на нито един елемент на $|\mathfrak{A}|$. Нека Нека $0 \leqslant p \leqslant n$ е такова, че $\beta_{j_p} <_{\mathfrak{B}} \beta_l <_{\mathfrak{B}} \beta_{j_{p+1}}$ (ако β_l е по-малко от всички образи на φ, дефинирани до момента, то $p = 0$ и е в сила само второто неравенство, а ако β_l е по-голямо от всички от всички образи на φ, дефинирани до момента, то $p = n$ и е в сила само първото неравенство). Нека сега k е най-малкото естествено число, за което $\alpha_{i_p} <_{\mathfrak{A}} \alpha_k <_{\mathfrak{A}} \alpha_{i_{p+1}}$. Полагаме $\varphi(\alpha_k) \equiv \beta_l$.

Ясно е, че дефинираното изображение е инективно. От друга страна изборът на α_k на нечетни стъпки и β_l на четни осигурява съответно, че $\mathrm{dom}(\varphi) \equiv |\mathfrak{A}|$ и φ е сюрективно. От друга страна изборът на β_l на нечетни стъпки и α_k на четни осигурява, че

$$\alpha_i <_{\mathfrak{A}} \alpha_j \iff \varphi(\alpha_i) <_{\mathfrak{B}} \varphi(\alpha_j)$$

и следователно φ е изоморфизъм.

□

Предвид горната теорема DLO е ω-категорична формална система. Освен това DLO е непротиворечива и има само безкрайни модели и следователно DLO е пълна.