Примерни решения на домашно №3 на КН2, 28 декември 2020 г.

Задача 1: Нека $m, n \in \mathbb{N}^+$, като $n \geq m$. Нека $\left\{ p \atop q \right\}$ означава броя на разбиванията на p-елементно множество на точно q подмножества. Нека $p^{\underline{q}}$ означава произведението $\prod_{i=0}^{q-1}(p-i)$. Докажете с комбинаторни съображения, че

$$n^m = \sum_{k=1}^{m} \left\{ m \atop k \right\} \cdot n^{\underline{k}}$$

Решение: Лявата страна е броят на функциите $f : X \to Y$, където $|X| = m$ и $|Y| = n$.

Нека $Y' = \{y \in Y \mid \exists x \in X(f(x) = y)$ и нека $|Y'| = k$. Да разбием множеството от функциите по k. k не може да е нула, защото Y' е непразно; точните долна и горна граница за k са съответно 1 и m. Нека $g(k, m, n)$ означава броя на функциите от m-елементен домейн в n-елементен кодомейн, такива че точно k елемента от кодомейна са образи, за $1 \leq k \leq m$. По принципа на разбиването:

$$n^m = \sum_{k=1}^{m} g(k, m, n)$$

Ще докажем, че

$$g(k, m, n) = \left\{ m \atop k \right\} k! \binom{n}{k}$$

Всяка функция от m-елементен домейн X в n-елементен кодомейн Y, такава че точно k елемента от кодомейна са образи, се определя еднозначно от следните две неща.

- Кои елементи от домейна се изобразяват върху даден елемент от Y'. Това е произведението от:
  - начините да бъде разбит X на точно k дяла, тоест $\left\{ m \atop k \right\}$,
  - и броят на биекциите от това разбиване в Y', тоест $k!$.
- Кои k елемента от Y са в Y'. Това е биномният коефициент $\binom{n}{k}$.

По принципа на произведението, броят на функциите от m-елементен домейн X в n-елементен кодомейн Y, такава че точно k елемента от кодомейна са образи, е $\left\{ m \atop k \right\} k! \binom{n}{k}$. И така,

$$n^m = \sum_{k=1}^{m} \left\{ m \atop k \right\} k! \binom{n}{k}$$

Имайки предвид, че $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$, получаваме желаното тъждество

$$n^m = \sum_{k=1}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} n^{\underline{k}}$$

Задача 2: Редицата на Fibonacci се дефинира чрез рекурентното уравнение

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0, \\ 1, & \text{ако } n = 1, \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{ако } n \geq 2 \end{cases}$$

Да разгледаме друга редица, дефинирана чрез рекурентното уравнение

$$H(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ H(n-1) + 2H(n-2) + 3H(n-3) + \cdots + nH(0), & \text{ако } n \geq 1 \end{cases}$$

Докажете, че $H(n) = F(2n)$, за всяко $n \geq 1$.

Решение: Щом за $n \geq 1$

$$H(n) = H(n-1) + 2H(n-2) + 3H(n-3) + \cdots + nH(0)$$

то за $n \geq 2$

$$H(n-1) = H(n-2) + 2H(n-3) + 3H(n-4) \cdots + (n-1)H(0)$$

Написани заедно, тези уравнения изглеждат така (това е за $n \geq 2$):

$$\begin{aligned} H(n) &= H(n-1) + 2H(n-2) + 3H(n-3) + \cdots + (n-1)H(1) + nH(0) \\ H(n-1) &= \phantom{H(n-1) + {}} H(n-2) + 2H(n-3) + \cdots + (n-2)H(1) + (n-1)H(0) \end{aligned}$$

Изваждайки второто от първото, получаваме

$$H(n) - H(n-1) = H(n-1) + H(n-2) + H(n-3) + \cdots + H(1) + H(0)$$

Тоест, за $n \geq 2$,

$$H(n) = 2H(n-1) + H(n-2) + H(n-3) + \cdots + H(1) + H(0)$$

Тоест, за $n \geq 3$,

$$H(n-1) = 2H(n-2) + H(n-3) + H(n-4) + \cdots + H(1) + H(0)$$

Отново изваждаме уравнението за $H(n-1)$ от това за $H(n)$ и получаваме

$$\begin{aligned} &H(n) - H(n-1) = 2H(n-1) - H(n-2) \quad \leftrightarrow \\ &H(n) = 3H(n-1) - H(n-2) \end{aligned} \tag{1}$$

Това е в сила за $n \geq 3$. Началните стойности са $H(2) = 3$ и $H(1) = 1$, които можем да получим от дефиницията на $H(n)$ от условието. $H(0) = 1$ по условие.

Да разгледаме $F(2n)$. Ако $n \geq 1$, от дефиницията на редицата на Fibonacci имаме

$$F(2n) = F(2n-1) + F(2n-2)$$

Ако $n \geq 2$, в сила е

$$F(2n-1) = F(2n-2) + F(2n-3) \tag{2}$$

$$F(2n-2) = F(2n-3) + F(2n-4) \quad \leftrightarrow \quad F(2n-3) = F(2n-2) - F(2n-4) \tag{3}$$

Тогава, за $n \geq 2$, използвайки (2) и (3), получаваме

$$\begin{aligned} F(2n) &= F(2n-1) + F(2n-2) \\ &= F(2n-2) + F(2n-3) + F(2n-2) \\ &= 2F(2n-2) + F(2n-3) \\ &= 2F(2n-2) + F(2n-2) - F(2n-4) \\ &= 3F(2(n-1)) - F(2(n-2)) \qquad (4) \end{aligned}$$

Ще докажем, че $H(n) = F(2n)$ за $n \geq 1$ със силна индукция по n. Базата е за $n \in \{1, 2\}$.

- За $n = 1$, от една страна $H(1) = 1$, а от друга страна $F(2) = 1$. ✓
- За $n = 2$, от една страна $H(2) = 3$, а от друга страна $F(4) = 3$. ✓

Индуктивното предположение е, че $H(k) = F(2k)$ за всяко $k \in \{1, \dots, n-1\}$. От (1) знаем, че

$$H(n) = 3H(n-1) - H(n-2)$$

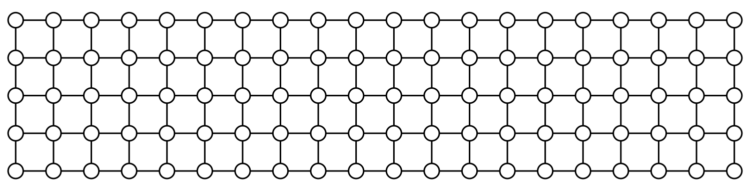
От индуктивното предположение знаем, че $H(n-1) = F(2(n-1))$ и $H(n-2) = F(2(n-2))$. Тогава

$$H(n) = 3F(2(n-1)) - F(2(n-2))$$

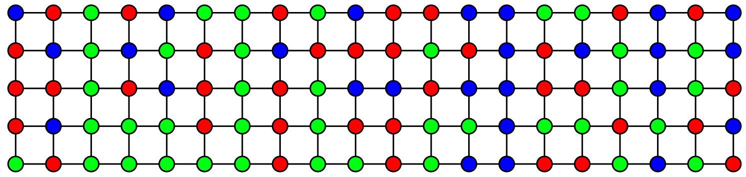
Прилагаме (4) и получаваме, че

$$H(n) = F(2n)$$

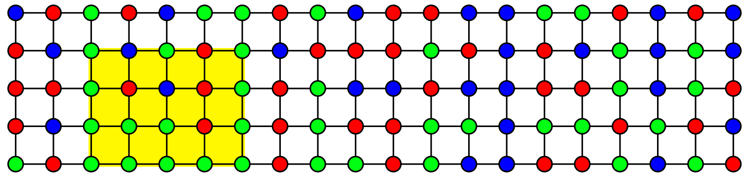
Задача 3: Представете си правоъгълна мрежа с размери 5×20 като тази:



Докажете, че както и да се оцветяват пресечните точки в цветовете зелен, червен и син, примерно така:



винаги има четири пресечни точки, две по две различни, оцветени в един и същи цвят, които образуват правоъгълник. В нашия пример, ето правоъгълник със зелени върхове, очертан с жълто:



Решение: В действителност, дори по-слабо твърдение е вярно: достатъчно е мрежата да е с размери 4×19, за да има такъв правоъгълник. Ще докажем за 4×19.

Щом редовете са четири, а цветовете са три, всяка от 19-те колони има повтарящ се цвят по принципа на чекмеджетата. Във всяка колона фиксираме двойка пресечни точки с един и същи цвят. Има най-много $\binom{4}{2} = 6$ възможности за тези две точки (с повтарящи се цветове), защото общо колоната има 4 точки. Освен това, има 3 възможности за цвета на такава двойка, откъдето има $3 \cdot 6 = 18$ различни възможности за комбинации от цвят и позиции на такава двойка точки. А колоните са 19. Прилагаме пак принципа на чекмеджетата, като комбинациите от цвят и позиция на двойката са чекмеджетата, а колоните са ябълките. Заключаваме, че има поне две ябълки в чекмедже, тоест, за две различни колони е вярно, че и позициите на двойката точки са еднакви, и цветът е еднакъв. Това очевидно дава правоъгълник, чиито върхове са в един и същи цвят.

Задача 4: Колко думи с дължина n над азбуката $\{a, b, c, d\}$ не съдържат нито една от поддумите aa, ab, ba, bb? *Поддума* е подредица, ако мислим за цялата дума като за редица. Между буквите на поддумата не може да има други букви. Като пример, думата $acaacd$ съдържа поддумата aa (на трета и четвърта позиция), докато $acacd$ не съдържа поддумата aa, въпреки че има две a-та.

Решете задачата като съставите рекурентно уравнение и го решите.

Решение: Нека A_n е множеството от думи с дължина n над азбуката $\{a, b, c, d\}$ не съдържат нито една от поддумите aa, ab, ba, bb. Нека $T_n = |A_n|$. Да видим как T_n зависи от по-малки стойности на аргумента. За целта да разгледаме структурата на A_n. Нека α е произволна дума от A_n, за някое $n \geq 1$.

Ако α започва със c или d, това, което следва, е дума от A_{n-1} **без ограничения**. Това съображение ни дава събираемо $+2T_{n-1}$ в израза за T_n.

Ако α започва с a или b, това, което следва, трябва да е c или d, и после има дума от A_{n-2}, ако $n \geq 2$. Това съображение ни дава събираемо $+4T_{n-2}$ в израза за T_n. Четворката идва от две възможности за първата буква по две възможности за втората.

И така,

$$T_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ 4, & \text{ако } n = 1, \\ 2T_{n-1} + 4T_{n-2}, & \text{ако } n \geq 2 \end{cases}$$

В началните условия допускаме празната дума с дължина нула. Тя е точно една. Ако не искаме да допускаме празната дума, началните условия трябва да са T_1 и T_2, като $T_2 = 12$ го смятаме на ръка.

Решението е

$$T_n = 1/10 \left(-3\sqrt{5} + 5\right)\left(-\sqrt{5} + 1\right)^n + 1/10 \left(\sqrt{5} + 1\right)^n \left(3\sqrt{5} + 5\right)$$