4.2 Квадратурна формула на Гаус

Дефиниция 1. *Казваме, че една квадратурна формула има* ***алгебрическа степен на точност*** *(АСТ) m, ако тя е точна за всички алгебрични полиноми от степен $\leq m$ и съществува полином от степен $m+1$, за който тя не е точна.*

Да разгледаме квадратурната формула в общия вид

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{4.1}$$

където $\mu(x)$ е дадено тегло, дефинирано в $[a,b]$, точките $\{x_k\}_{k=1}^n$ ($a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$) са възлите на квадратурната формула, а $\{A_k\}_{k=1}^n$ са реални числа – коефициентите на квадратурната формула. Искаме да определим възлите и коефициентите така, че съответната квадратурна формула да има възможно най-висока АСТ. Тази формула се нарича **квадратурна формула на Гаус**. Построяването ѝ се основава на следното

Твърдение 1. *При всяко естествено число n съществува единствена квадратурна формула от вида (4.1) с АСТ $2n-1$ (и нито една с по-голяма АСТ). Възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$ на тази квадратурна формула са нулите на полинома от степен n, ортогонален в $[a,b]$ с тегло $\mu(x)$ на всички алгебрични полиноми от степен $n-1$.*

Първо ще покажем как можем да изведем формулите при тегло $\mu(x)=1$ по метода на неопределените коефициенти. С други думи, ще изведем формули за приближеното пресмятане на

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Тези формули са известни като формули на Гаус-Льожандър. Обърнете внимание, че обикновено те се задават за приближено интегриране в граници от -1 до 1. Произволен интеграл в граници от a до b може да се пресметне, като се направи линейна смяна. Ще покажем как става това.

Задача 1. Да се намери по метода на неопределените коефициенти формулата на Гаус-Льожандър с два възела.

Решение. Търсим приближението във вида

$$I \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

Неизвестните параметри, които подлежат на определяне са A_1, A_2, x_1, x_2. Съгласно Твърдение 1, формулата трябва да има АСТ 3, т.е. да е точна за всички полиноми от π_3. Ще вземем най-простия базис $\{1, x, x^2, x^3\}$ и получаваме системата

$$\left|\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 1.dx &= A_1.1 + A_2.1\\ \int_{-1}^{1} x.dx &= A_1.x_1 + A_2.x_2\\ \int_{-1}^{1} x^2.dx &= A_1.x_1^2 + A_2.x_2^2\\ \int_{-1}^{1} x^3.dx &= A_1.x_1^3 + A_2.x_2^3\end{aligned}\right.$$

Решаваме тази система, вземайки предвид, че $x_1 < x_2$:

```
In[5]:= Solve[
  {A1 + A2 == Integrate[1, {x, -1, 1}],
   A1 x1 + A2 x2 == Integrate[x, {x, -1, 1}],
   A1 x1^2 + A2 x2^2 == Integrate[x^2, {x, -1, 1}],
   A1 x1^3 + A2 x2^3 == Integrate[x^3, {x, -1, 1}],
   x1 < x2
  }, {A1, A2, x1, x2}]
```

Out[5]= $\left\{\left\{A_1 \to 1,\ A_2 \to 1,\ x_1 \to -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2 \to \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$

Така, търсената формула има вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

□

Аналогично могат да се изведат и формули с повече възли. Ще дадем някои формули в следната таблица, като укажем възлите и коефициентите за всяка от тях.

Брой възли	Коефициенти	Възли	АСТ
1	$A_1 = 2$	$x_1 = 0$	1
2	$A_1 = 1$ $A_2 = 1$	$x_1 = -1/\sqrt{3}$ $x_2 = 1/\sqrt{3}$	3
3	$A_1 = 5/9$ $A_2 = 8/9$ $A_3 = 5/9$	$x_1 = -\sqrt{3/5}$ $x_2 = 0$ $x_3 = \sqrt{3/5}$	5
4	$A_1 = (18-\sqrt{30})/36$ $A_2 = (18+\sqrt{30})/36$ $A_3 = (18+\sqrt{30})/36$ $A_4 = (18-\sqrt{30})/36$	$x_1 = -\sqrt{525+70\sqrt{30}}/35$ $x_2 = -\sqrt{525-70\sqrt{30}}/35$ $x_3 = \sqrt{525-70\sqrt{30}}/35$ $x_4 = \sqrt{525+70\sqrt{30}}/35$	7

За да интегрираме в произволни граници, т.е. за да намерим приближено стойността на

$$\int_a^b f(x)dx,$$

първо трябва да направим **смяна на променливата**:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

Задача 2. Да се пресметне приближено стойността на

$$\int_0^{0.8} f(x)dx,$$

където

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5,$$

като се изпозват формулите на Гаус-Льожандър с 2 и 3 възела. Да се сравни с точната стойност (1.640533). Да се сравни със стойността, която се получава по формулите на трапеците и Симпсън.

Решение. За да можем да приложим формулите на Гаус-Льожандър, трябва да интегрираме в граници от -1 до 1. Следователно първо трябва да направим смяна на променливата. Полагаме

$$x = 0.4 + 0.4t$$

Тогава интегралът добива вида

$$\int_{-1}^{1} [0.2 + 25(0.4 + 0.4t) - 200(0.4 + 0.4t)^2 + 675(0.4 + 0.4t)^3 \\ - 900(0.4 + 0.4t)^4 + 400(0.4 + 0.4t)^5] \times 0.4dt$$

Нека означим подинтегралната функция с $\varphi(t)$.
<u>Двуточкова формула на Гаус-Льожандър.</u> Получаваме

$$I \approx \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

```
In[8]:= φ[t_] := (0.2 + 25 (0.4 + 0.4 t) - 200 (0.4 + 0.4 t)^2 +
            675 (0.4 + 0.4 t)^3 - 900 (0.4 + 0.4 t)^4 + 400 (0.4 + 0.4 t)^5) 0.4
        φ[-1/√3] + φ[1/√3]

Out[9]= 1.82258
```

<u>Триточкова формула на Гаус-Льожандър.</u> Имаме

$$I \approx \frac{5}{9}\varphi\left(-\sqrt{3/5}\right) + \frac{8}{9}\varphi(0) + \frac{5}{9}\varphi\left(\sqrt{3/5}\right).$$

```
In[18]:= φ[t_] := (0.2 + 25 (0.4 + 0.4 t) - 200 (0.4 + 0.4 t)^2 +
             675 (0.4 + 0.4 t)^3 - 900 (0.4 + 0.4 t)^4 + 400 (0.4 + 0.4 t)^5) 0.4
         NumberForm[5/9 φ[-√(3/5)] + 8/9 φ[0] + 5/9 φ[√(3/5)], 7]

Out[19]//NumberForm=
         1.640533
```

<u>Формула на трапеците.</u> Можем да приложим формулата на трапеците директно към интеграла, както е зададен в условието (в граници от 0 до 0.8). Получаваме

$$I \approx \frac{0.8}{2}(f(0) + f(0.8))$$

```
In[50]:= f[x_] := 0.2 + 25 x - 200 x^2 + 675 x^3 - 900 x^4 + 400 x^5
         0.8/2 (f[0] + f[0.8])
Out[51]= 0.1728
```

<u>Формула на Симпсън.</u>

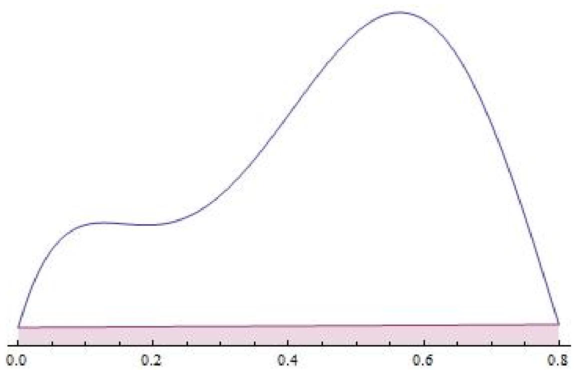
$$I \approx \frac{0.8}{6}(f(0) + 4f(0.4) + f(0.8))$$

```
In[46]:= f[x_] := 0.2 + 25 x - 200 x^2 + 675 x^3 - 900 x^4 + 400 x^5
         0.8/6 (f[0] + 4 f[0.4] + f[0.8])
Out[47]= 1.36747
```

Да обобщим получените резултати

Формула	АСТ	Резултат	Грешка(по модул)
на трапеците	1	0.1728	1.468
на Симпсън	3	1.36747	0.27
Гаус(2 възела)	3	1.82258	0.182
Гаус(3 възела)	5	1.640533	0.0

Резултатите в таблицата показват, че АСТ е важен критерий за точността на квадратурните формули. Формулите на Симпсън и двуточковата формула на Гаус-Льожандър са с една и съща АСТ и дават приблизително еднаква грешка. Предимството на формулата на Гаус обаче е, че функцията се оценява само в 2 точки, а по формулата на Симпсън – 3. Триточковата формула на Гаус е точна за всички полиноми от π_5 и затова няма грешка при приближаването на $f(x)$. Поучително е да се види и графично защо формулата на трапеците дава толкова голяма грешка в този случай:



□

Библиография

[1] Боянов, Б.: Лекции по числени методи. Дарба, 2008

[2] Сборник по числени методи – http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/nummeth

[3] Сендов, Бл., Попов, В.: Числени методи. Първа част. Университетско издателство „Св.Климент Охридски”, 1996

[4] Kiusalaas, J.: Numerical Methods in Engineering. Cambridge University Press, 2010

[5] Chapra, S.: Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists. McGraw Hill, 2012

[6] Бахвалов, Н.С., Лапин, А.В., Чижонков, Е.В.: Численные методы в задачах и упражнениях. Высшая школа, 2000

[7] Hollis, S: Manual for Stewart's Single Variable Calculus. Brooks/Cole, 2008

[8] Antia, H. M.: Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1991