ТЕМА 15: МИНИМИЗАЦИЯ НА БУЛЕВИ ФУНКЦИИ

Дефиниции:

Сложност на формула
Дължина на ДНФ
Минимална ДНФ
Импликанта на функция
Проста импликанта
Ядрова импликанта
Съкратена ДНФ
Неприводина ДНФ
Алгоритъм на Куайн-МакКласки

Минимизация:

СвДНФ $\rightarrow$ Съкратена ДНФ $\rightarrow$ Неприводими ДНФ $\rightarrow$ Минимални ДНФ

Задачи за упражнение:

Задача 1: Кои от указаните елементарни конюнкции са прости импликанти на функцията f?

a) $\{x_1, \overline{x}_3, x_1x_2, x_2\overline{x}_3\}$ $\quad f(\widetilde{x}^3) = (00101111)$

b) $\{x_1\overline{x}_2, x_2x_3, x_1, x_1x_2x_3\}$ $\quad f(\widetilde{x}^3) = (01111110)$

Задача 2: Да се построи съкратената ДНФ на следната функция по метода на Куайн-МакКласки:

a) $f(\widetilde{x}^3) = (11111000)$

b) $f(\widetilde{x}^4) = (1111100001001100)$

Задача 3: Да се построи съкратената ДНФ на следната функция:

a) $f(\widetilde{x}^4) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4$

b) $f(\widetilde{x}^4) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_3x_4$

c) $f(\widetilde{x}^4) = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4$

Задача 4: Да се намерят всички Минимални Дизюнктивни Нормални Форми на всяка от булевите функции:

a) $f(\widetilde{x}^3) = (01111110)$

b) $f(\widetilde{x}^4) = (1110011000010101)$

c) $f(\widetilde{x}^4) = (0110101111011110)$

Решение на зад. 4а)

Алгоритъмът на Куайн-МакКласки има за цел получаване на всички прости импликанти на функцията, като стартира от нейната съвършена дизюнктивна нормална форма.

СвДНФ$(f) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3$

Пълните конюнкции от СвДНФ, намиращи се в първата колона на таблицата, се слепват две по две при наличие на следното условие:

$K_i = x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_{p-1}^{\sigma_{p-1}}x_p^{\sigma_p}x_{p+1}^{\sigma_{p+1}}\dots x_n^{\sigma_n}; \quad K_j = x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_{p-1}^{\sigma_{p-1}}x_p^{\overline{\sigma}_p}x_{p+1}^{\sigma_{p+1}}\dots x_n^{\sigma_n}$

И резултатът е:

$K = K_i \vee K_j = x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_{p-1}^{\sigma_{p-1}}x_{p+1}^{\sigma_{p+1}}\dots x_n^{\sigma_n}$

Така конюнкциите, получени в резултат на слепването, имат една буква на променлива по-малко и се записват в следващата колона. Когато се извършат всички възможни слепвания, то неслепените конюнкции са точно простите импликанти на функцията.

$*\overline{x}_1x_2x_3$	$\overline{x}_1x_3$
$*x_1\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_1x_2$
$*x_1x_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_2x_3$
$*\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$	$x_1\overline{x}_2$
$*\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	$x_2\overline{x}_3$
$*x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_3$

Съкратена ДНФ$(f) = \overline{x}_1x_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3$

Таблица на покритие на единичното множество на функцията от нейните прости импликанти:

	001	010	011	100	101	110	
$\overline{x}_1x_3$	*		*				t_1
$\overline{x}_1x_2$		*	*				t_2
$\overline{x}_2x_3$	*				*		t_3
$x_1\overline{x}_2$				*	*		t_4
$x_2\overline{x}_3$		*				*	t_5
$x_1\overline{x}_3$				*		*	t_6

Функция на покритие:

$$f'(\widetilde{t}^6) = (t_1 \vee t_3)(t_2 \vee t_5)(t_1 \vee t_2)(t_4 \vee t_6)(t_3 \vee t_4)(t_5 \vee t_6) =$$
$$= t_2t_3t_6 \vee t_2t_3t_4t_5 \vee t_1t_3t_5t_6 \vee t_1t_3t_4t_5 \vee t_1t_2t_4t_6 \vee t_1t_2t_4t_5 \vee t_1t_4t_5t_6 \vee t_1t_4t_5$$

От така получената функция на покритие следва, че началната функция има 8 неприводими ДНФ. От тях 6 са със сложност 8 и две са със сложност 6. Следователно тези последни две са минималните ДНФ на разглежданата функция.

МДНФ1$= \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3$

МДНФ2$= \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3$

Задача 5: Нека $L(f(\widetilde{x}^n))$ е сложността на МДНФ на функцията $f(\widetilde{x}^n)$, а $l(f(\widetilde{x}^n))$ е дължината на най-късата ѝ ДНФ. Да се докаже,че:

a) $l(f(\widetilde{x}^n)) \leq 2^{n-1}$

b) $L(f(\widetilde{x}^n)) \leq n2^{n-1}$

Задача 6: Нека $f(\widetilde{x^n}) \in L$ е произволна линейна функция. При какво условие функцията има единствена ДНФ, която е съвършена, съкратена, неприводима и минимална.

Задача 7: Да се докаже, че съкратената ДНФ на монотонна функция не съдържа отрицания на променливите и е минимална.

Задача 8: Намерете всички минимални ДНФ на функцията f с единично множество T_f:

a) $T_f = \{0, 3, 5, 6\}$

b) $T_f = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c) $T_f = \{0, 1, 3, 6, 7, 8, 10, 12, 14\}$

Задача 9: Намерете минималните ДНФ на всяка от следните функции:

a) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$

b) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus x_4)$

c) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1)$

Задача 10: Нека $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{x}^n)$ са булеви функции такива, че $g(\widetilde{x}^n) \leq f(\widetilde{x}^n)$. Да се докаже, че всяка импликанта на g се поглъща от някоя проста импликанта на f.

Задача 11: Нека $f \in \mathcal{F}_2^n$ е такава, че в нейната съвършена дизюнктивна нормална форма всяка елементарна конюнкция съдържа най-много една променлива без отрицание. Тогава същото важи за всяка нейна проста импликанта.

Задача 12: Ако булевата функция $f \neq \widetilde{1}$, то всяка нейна импликанта от ранг 1 е ядрова.