Примерни решения на домашно №4 на КН2, 12 януари 2021 г.

Задача 1: Играта *домино* се играе с 28 плочки. Всяка плочка е правоъгълник с размери 1×2 и е разделена на два квадрата 1×1. Върху квадратите има точки, чиито брой варира от 0 до 6.

Когато плочките се редят в редица, те се слагат една до друга така, че страна на квадрат на едната плочка е долепена точно до страна на квадрат на другата плочка, като двата квадрат имат един и същи брой точки. Допустимо е единият от правоъгълниците да е под прав ъгъл спрямо другия:

По този начин може да строим *редица от плочки*, да кажем отляво надясно, при която всяка следваща плочка е долепена така до предишната, че квадратите, които се оказват един до друг, имат един и същи брой точки.

Затворена редица от плочки е редица, в която последният квадрат на последната плочка е долепен по първия квадрат на първата плочка и за тези два квадрата също е вярно, че имат един и същи брой точки.

Докажете, че е възможно да се направи затворена редица от всички плочки. Доказателството трябва да е теоретично и да ползва теорията на графите, което означава първо да се дефинира някакъв граф и после желаното свойство да се преведе на езика на теорията на графите и **да се докаже като свойство на граф**.

Решение: Дефинираме граф G, чиито върхове са различните квадратчета на плочките от доминото. Тези квадратчета са 7, защото има 7 възможности за точките – от 0 до 6. Следователно, G има 7 върха.

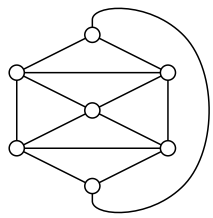
Между връх i и връх j има ребро тстк има плочка, която има i точки в едното си квадратче и j точки в другото. С други думи, ребрата отговарят биективно на плочките, така че са точно 28, понеже плочките са 28.

G е неориентиран пълен граф, който освен това има примка на всеки връх (тъй като има плочки с i и i точки, за $0 \leq i \leq 6$). G е свързан, тъй като всеки връх е съседен на всеки друг. И всеки връх на G има степен 8, тъй като има 6 различни съседа, а примката се брои два пъти.

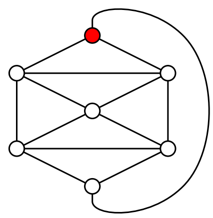
Да съществува затворена редица от всички плочки в доминото е същото като в G да има цикъл, който съдържа всяко ребро точно веднъж. Такъв цикъл, както знаем, се нарича Ойлеров цикъл. От лекции знаем, че Ойлеров цикъл съществува тстк графът е свързан и всеки връх е от четна степен. Но G е свързан и всеки връх е от четна степен, така че G е Ойлеров граф. Следователно, в доминото има затворена редица от всички плочки.

Задача 2: Нека G е граф. Припомнете си, че $\omega(G)$ е кликовото число на G, а $\chi(G)$ е хроматичното число на G. Дайте пример за граф G, такъв че $\omega(G) \leq 3$ и $\chi(G) \geq 4$. Обосновете добре отговора си.

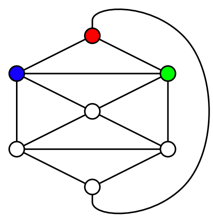
Решение: Разгледайте следния граф:



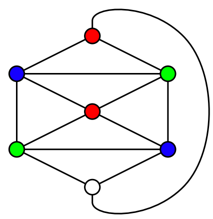
Очевидно кликовото число е 3, защото 3-клики има, а 4-клики няма. Твърди се, че хроматичното число е 4. Разглеждаме върхово оцветяване с минимален брой цветове. Разглеждаме най-горния връх. Той е някакъв цвят, БОО нека е червен:



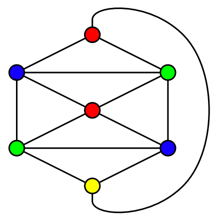
Двата върха под него трябва да са цвят, различен от червен, и освен това да са в различни цветове един от друг. БОО, син и зелен:



Ако не искаме да използваме четвърти цвят, има единствено възможно оцветяване на трите върха под тях:



И сега виждаме, че не може “да минем” със само три цвята, защото все още неоцветеният връх най-долу има три съседа, всеки от които е или червен, или зелен, или син; ерго, той трябва да е друг цвят. Така че хроматичното число е по-голямо от 3. От друга страна, ако го оцветим в някакъв четвърти цвят, БОО в жълто, получаваме коректно оцветяване на върховете на целия граф.



Следователно, хроматичното число е 4.

И така, имаме пример за граф с кликово число 3 и хроматично число 4.

Задача 3: На конференция по Дискретна математика присъстват 100 математика. Всеки от тях се познава с поне 50 от останалите участници. На официалната вечеря в края на конференцията всички 100 участници сядат на една (огромна!) кръгла маса. Докажете, че участниците може да седнат по такъв начин на масата, че всеки да се познава със своите двама съседи по маса.

Решение: Това е следствие от Теоремата на Dirac (има я в лекционните записки), но може да се изведе и от първи принципи.

Дефинираме граф на познанствата, чиито върхове са стоте математици, а ребрата са познанствата – между два върха има ребро тстк съответните хора се познават. Графът е обикновен граф G, като $|V(G)| = 100$, а $\delta(G) \geq 50$ ("$\delta(G)$" е минималната степен на връх в G). Това, което трябва да се покаже, преведено в езика на графите е, че G е Хамилтонов.

Първо показваме, че G е свързан. Да допуснем, че G не е свързан. Тогава G има поне две свързани компоненти. Нещо повече, G има свързана компонента G_1 с не повече от 50 върха. Тогава $\delta(G_1) \leq 49$, защото всеки връх от G_1 може да е съсед на не повече от 49 върха. Но степента на връх u от G_1 е същата като степента на u в G, защото u няма съседи извън G_1. Изведохме, че в G има поне един връх от степен най-много 49, в противоречие с условието на задачата.

И така, G е свързан. Нека p е път с максимална дължина в G. Да кажем,

$$p = u_1, u_2, \ldots, u_k$$

Крайните му върхове са u_1 и u_k. Ще покажем, че всички съседи на u_1 са върхове от p. Наистина, ако допуснем, че u_1 има съсед, който не е в p, веднага ще изведем, че p не е с максимална дължина. Аналогично, всички съседи на u_k се намират в p.

Твърдим, че за поне едно i, такова че $1 \leq i < k$, е вярно, че u_i е съсед на u_k, а u_{i+1} е съсед на u_1. Да допуснем, че няма такова i. Тогава за всеки съсед на u_1, който е в p (а току-що показахме, че всички съседи на u_1 са в p) е вярно, че върхът вляво от него не е съсед на u_k. Тогава p съдържа поне следните върхове:

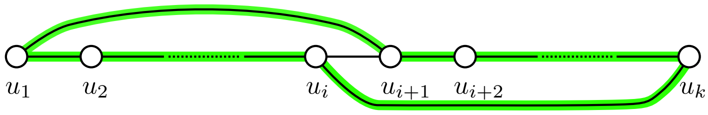
- върховете, които са вляво от съседите на u_1. Те **не са** съседи—съгласно последното допускане—на u_k. Съседите на u_1 са поне 50, следователно и въпросните върхове са поне 50;
- върховете, които **са** съседи на u_k, а те също са поне 50;
- връх u_k, който нито е вляво от съсед на u_1, нито е съсед на себе си.

Тези множества от върхове имат две по две празно сечение, следователно p съдържа поне 101 върха, което е невъзможно.

Следователно съществува поне едно i, такова че $1 \leq i < k$ и u_i е съсед на u_k, а u_{i+1} е съсед на u_1. Тогава в G съществува цикълът

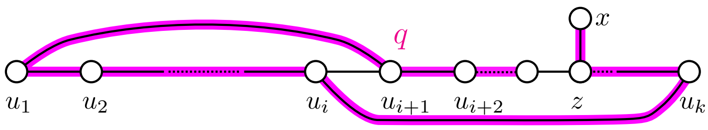
$$c = u_1, u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_{k-1}, u_k, u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \ldots, u_2, u_1$$

Ето илюстрация на цикъла c (в зелено):



Но дали този цикъл е Хамилтонов? Да допуснем, че не е. Тоест, допускаме, че $V(c) \neq V$. Тъй като G е свързан, съществува връх $x \in V \setminus V(c)$, който е съсед на връх $z \in V(p)$. z не може да е някой от u_1 или u_k, защото за всеки от тях, всички негови съседи са в p.

Да разгледаме пътя q, който започва с x, следващият връх е z, следващият е единият от двата съседа на z в p и после "върви" по цикъла c, докато не достигне другия съсед на z в p:



Очевидно $|q| = |p|+1$, в противоречие с това, че p е максимален път. Тогава $V \setminus V(c) = \emptyset$ и c е Хамилтонов цикъл.

Задача 4: На лекции видяхме какво е административна карта, какво е "район" и как дефинираме "съседни райони" в картата. Докажете, че за всяка административна карта има поне един район, който има по-малко от шест съседни района.

Решение: На всяка такава карта съответства планарен граф. Това, което трябва да се докаже, на езика на теорията на графите е, че всеки планарен граф има връх от степен, по-малка от 6.

Да допуснем противното. Тогава има планарен граф $G = (V, E)$, в който всеки връх е от степен поне 6. Знаем от лекции, че

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Щом $d(v) \geq 6$ за всеки $v \in V$, то $\sum_{v \in V} d(v) \geq 6n$. Тогава $2m \geq 6n$, тоест, $m \geq 3n$. Но от лекции знаем, че във всеки планарен граф $m \leq 3n - 6$. Полученото противоречие показва, че допускането е невярно.