Упражнение 1 по Дискретни Структури, КН, II поток, зимен семестър 2012-2013 г.

Въведение в теорията на множествата

Зад. 1 Кои от следните множества са равни?

1. $\{1, 2, 3, 5\}$
2. $\{1, 2, 1\}$
3. $\{2, 2, 1\}$
4. $\{1, \{1, 2, 2, 1\}, 1, \{1, 2\}\}$
5. $\{1\}$
6. $\{\{1\}\}$
7. $\{\{\{1\}\}\}$
8. $\{\{\{1, 1\}\}\}$
9. $\{\{\{1\}, \{1\}\}\}$

Зад. 2 Нека A е множеството $A = \{a, b, \{a\}, \{\{a, b\}\}, \{a, b\}\}$, където a и b са протоелементи. Кои от следните твърдения са верни?

1. $a \in A$
2. $a \subseteq A$
3. $\{a\} \in A$
4. $\{a\} \subseteq A$
5. $\{a, b\} \in A$
6. $\{a, b\} \subseteq A$
7. $\{a, b\} \subset A$
8. $\{\{a, b\}\} \in A$
9. $\{\{a, b\}\} \subseteq A$
10. $\{\{\{a, b\}\}\} \in A$
11. $\{\{\{a, b\}\}\} \subseteq A$

Зад. 3 Кои от следните твърдения са верни?

1. $\emptyset \in \emptyset$
2. $\emptyset \subseteq \emptyset$
3. $\emptyset \subset \emptyset$
4. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
5. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
6. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

Нотация 1. *Множеството от естествените числа* $\{0, 1, \ldots\}$ *се означава с* $\mathbb{N}$. *Множеството от целите числа* $\{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ *се означава с* $\mathbb{Z}$. □

Зад. 4 Определете всички елементи на следните множества.

1. $\{x \,|\, x \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq x \wedge x \leq 9\}$
2. $\{x \,|\, x \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq x \wedge x \geq 9\}$
3. $\{1 + (-1)^x \,|\, x \in \mathbb{N}\}$
4. $\{1 + \frac{1}{x} \,|\, x \in \{2, 3, 5\}\}$
5. $\{n^2 + n^3 \,|\, n \in \{2, 3, 5\}\}$

Зад. 5 Нека множествата A, B, C, D, E, F, G и H са определени така:
$A = \mathbb{N}$ $B = \{n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ $C = \{n + 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ $D = \{2n + 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$
$E = \{n + 11 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ $F = \{n - 4 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ $G = \{2n + 2 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ $H = \{2n + 16 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$
Определете кои от тези множества са равни едно на друго.

Определение 1. *Нека* A *и* B *са произволни множества, а* U *е подходящ универсум. Дефинираме следните операции:*

обединение $A \cup B \stackrel{def}{=} \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$

сечение $A \cap B \stackrel{def}{=} \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$

разлика $A \setminus B \stackrel{def}{=} \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$

симетрична разлика $A \triangle B \stackrel{def}{=} \{x \,|\, (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

допълнение $\overline{A^U} \stackrel{def}{=} \{x \,|\, x \in U \wedge x \notin A\}$

□

Зад. 6 Използвайки познанията от съждителната логика, обосновете следната таблица на петте операции:

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$A \triangle B$	$\overline{A}$
0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0

Теорема 1. *Нека A, B и C са произволни множества. Нека U е подходящ универсум. Следните равенства са в сила:*

свойства на празното множество и универсума : $A \cap U = A, \quad A \cup U = U,$
$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A.$

свойства на допълнението: $A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = U.$

идемпотентност: $A \cap A = A, \quad A \cup A = A.$

закон за двойното допълнение: $\overline{\overline{A}} = A.$

комутативност: $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$

асоциативност: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$

дистрибутивност: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

закони на Де Морган: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

поглъщане: $A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A.$ □

Зад. 7 Докажете Теорема 1 чрез табличния метод.

Решение: Ще докажем единия от законите на Де Морган:

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Желаният резултат следва от равенството на колона 4 (зелено) и колона 7 (оранжево). □

Зад. 8 Нека A, B, C и D са произволни множества. Да се докаже или опровергае всяко от следните твърдения:

1. $A \cap B = \emptyset \quad \wedge \quad B \cap C = \emptyset \quad \rightarrow \quad A \cap C = \emptyset$
2. $A \cap B = \emptyset \quad \wedge \quad C \cap D = \emptyset \quad \rightarrow \quad (A \cap C) \cap (B \cap D) = \emptyset$
3. $A \cap B = \emptyset \quad \wedge \quad C \cap D = \emptyset \quad \rightarrow \quad (A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset$

Решение:
(1) не е вярно. За да докажем това, достатъчно е да демонстрираме един единствен *контрапример* – три множества A, B и C, за които твърдението не е вярно. Защо е достатъчен един контрапример? – защото твърдението всъщност е

$$\forall A \forall B \forall C (A \cap B = \emptyset \land B \cap C = \emptyset \rightarrow A \cap C = \emptyset)$$

Нека $A = \{1, 2\}$, $B = \{4\}$ и $C = \{2, 3\}$. Вярно е, че $A \cap B = \emptyset \land B \cap C = \emptyset$, но $A \cap C = \{2\}$.

(2) е вярно. Да разгледаме множеството $(A \cap C) \cap (B \cap D)$:

$(A \cap C) \cap (B \cap D) =$ (асоциативност)
$A \cap C \cap B \cap D =$ (комутативност)
$A \cap B \cap C \cap D =$ (асоциативност)
$(A \cap B) \cap (C \cap D) =$ (предпоставки $A \cap B = \emptyset$ и $C \cap D = \emptyset$)
$\emptyset \cap \emptyset =$ (свойства на празното множество)
$\emptyset$

(3) не е вярно. Като контрапример да разгледаме множествата $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{4, 5\}$ и $D = \{2, 6\}$. $A \cap B = \emptyset \land C \cap D = \emptyset$ е изпълнено, но $(A \cup C) \cap (B \cup D) = \{1, 2, 4, 5\} \cap \{3, 4, 2, 6\} = \{2, 4\} \neq \emptyset$.

Зад. 9 Докажете чрез табличния метод, че $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Зад. 10 Докажете чрез разсъждения (а не чрез таблица), че $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Решение:

$A \setminus B =$ (по дефиниция)
$\{x \mid x \in A \land x \notin B\} =$ (дефиниция на допълнение)
$\{x \mid x \in A \land x \in \overline{B}\} =$ (дефиниция на сечение)
$A \cap \overline{B}$

$\square$

Зад. 11 Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Решение:

$$
\begin{aligned}
&A \setminus (B \cup C) = && \text{(съгласно **Задача 10**)}\\
&A \cap \overline{B \cup C} = && \text{(закони на Де Морган)}\\
&A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = && \text{(асоциативност)}\\
&A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = && \text{(асоциативност)}\\
&(A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = && \text{(съгласно **Задача 10**)}\\
&\big(A \setminus \overline{\overline{B}}\big) \cap \overline{C} = && \text{(закон за двойното допълнение)}\\
&(A \setminus B) \cap \overline{C} = && \text{(съгласно **Задача 10**)}\\
&(A \setminus B) \setminus \overline{\overline{C}} = && \text{(закон за двойното допълнение)}\\
&(A \setminus B) \setminus C
\end{aligned}
$$

$\square$

Зад. 12 Докажете или опровергайте, че

1. $(A \cap B) \setminus (A \setminus C) = A \cap B \cap C$
2. $A \setminus ((B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
3. $\overline{\overline{A} \cup C} \setminus (A \cap B) = A \setminus (B \cup C)$
4. $\overline{A \setminus C} \cup \overline{B \cap \overline{C}} = \overline{(A \cap B) \setminus C}$
5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
6. $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}} = B \cup C$
7. $\overline{A \triangle B} = A \triangle \overline{B}$
8. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

Зад. 13 Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ и $D = \{2, 4, 6, 8\}$, а универсумът е $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Определете

1. $(A \cup B) \cap C$
2. $A \cup (B \cap C)$
3. $\overline{C} \cup \overline{D}$
4. $\overline{C \triangle D}$
5. $(A \cup B) \setminus C$
6. $A \cup (B \setminus C)$
7. $(B \setminus C) \setminus D$

8. $B \setminus (C \setminus D)$

9. $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$

Зад. 14 Докажете чрез табличния метод, че ако $C \subseteq B \setminus A$, то $\overline{A} \cap (B \cup C) = (A \cup B) \setminus A$.

Решение: Първо да направим пълната таблица на $\overline{A} \cap (B \cup C$ и $(A \cup B) \setminus A$.

A	B	C	$\overline{A}$	$B \cup C$	$\overline{A} \cap (B \cup C)$	$A \cup B$	$(A \cup B) \setminus A$
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0

Зелената и оранжевата колона не са равни. Но досега не сме използвали предпоставката, че $C \subseteq B \setminus A$. В общия случай (без тази предпоставка) множеството C се разбива на четири подмножества:

1. множеството от елементите на C, непринадлежащи нито на A, нито на B; на това множество съответства векторът 001

2. множеството от елементите на C, непринадлежащи на A, но принадлежащи на B; на това множество съответства векторът 011

3. множеството от елементите на C, принадлежащи на A, но непринадлежащи на B; на това множество съответства векторът 101

4. множеството от елементите на C, принадлежащи и на A, и на B; на това множество съответства векторът 111.

Имайки предвид предпоставката $C \subseteq B \setminus A$, ясно е, че множествата (1), (3) и (4) са празни. Това значи да игнорираме втория, шестия и осмия ред на таблицата:

A	B	C	$\overline{A}$	$B \cup C$	$\overline{A} \cap (B \cup C)$	$A \cup B$	$(A \cup B) \setminus A$
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0

В таблицата от останалите редове, шестата и осмата колона са равни:

A	B	C	$\overline{A}$	$B \cup C$	$\overline{A} \cap (B \cup C)$	$A \cup B$	$(A \cup B) \setminus A$
0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0

$\square$

Зад. 15 Нарисувайте диаграма на Вен за трите множества A, B и C, ако е дадено, че

- $A \subset B$ и $B \subset C$
- $A \subset B$ и $C \subset B$
- $A \subset B$, $C \subset B$ и $A \cap C = \emptyset$

Зад. 16 Нека

$$A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9, 11\}$$

Напишете всички подмножества на A, които

- съдържат точно две четни и точно едно нечетно число,
- съдържат точно пет елемента,
- не съдържат четни елементи.

Зад. 17 Дайте пример за три множества A, B и C, такива че

- $A \in B$ и $B \in C$ и $A \notin C$,
- $A \in B$ и $B \in C$ и $A \in C$,

Зад. 18 Докажете следните резултати за произволни множества A, B, C, D, без да ползвате диаграми на Вен (допуснете, че е даден подходящ универсум U):

1. Ако $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$, то $A \cap C \subseteq B \cap D$ и $A \cup C \subseteq B \cup D$.
2. $A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато $A \cap \overline{B} = \emptyset$.
3. $A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

Решение: Ще покажем, че ако $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$, то $A \cap C \subseteq B \cap D$. От дефиницията на подмножество знаем, че

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

където домейнът на x е U. Аналогично,

$$C \subseteq D \leftrightarrow \forall x(x \in C \to x \in D)$$
$$A \cap C \subseteq B \cap D \leftrightarrow \forall x(x \in A \cap C \to x \in B \cap D)$$

Трябва да покажем, че изводът

$$\forall x(x \in A \to x \in B) \land \forall x(x \in C \to x \in D) \quad \to \quad \forall x(x \in A \cap C \to x \in B \cap D)$$

е валиден. За да се освободим от кванторите, ще разгледаме следните прости съждения. Нека

- p е съждението $a \in A$ за *произволен* елемент a от универсума
- q е съждението $a \in B$ за същия a
- r е съждението $b \in C$ за *произволен* елемент b от универсума
- s е съждението $b \in D$ за същия b.

Тогава предпоставките са $p \to q$ и $r \to s$, а изводът можем да запишем като $p \land r \to q \land s$. Ще покажем, че

$$(p \to q \land r \to s) \to (p \land r \to q \land s)$$

е тавтология. Първо ще преобразуваме израза с еквивалентни преобразувания:

$$(p \to q \land r \to s) \to (p \land r \to q \land s) \equiv \quad (\text{съгласно } x \to y \equiv \neg x \lor y)$$
$$\neg\big((\neg p \lor q) \land (\neg r \lor s)\big) \lor \neg(p \land r) \lor (q \land s) \equiv \quad (\text{закони на Де Морган, асоциативност})$$
$$(p \land \neg q) \lor (r \land \neg s) \lor \neg p \lor \neg r \lor (q \land s)$$

Да наречем тази дизюнкция, Z. Ще покажем, че Z е тавтология.

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg r$	$p \land \neg q$	$r \land \neg s$	$q \land s$	Z
F	F	F	F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	T	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	F	F	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T	F	F	F	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T	T
T	T	T	F	F	F	F	T	F	T
T	T	T	T	F	F	F	F	T	T

Зад. 19 Докажете, че следните твърдения са еквивалентни за всички множества A и B (допуснете, че U е подходящ универсум):

а) $A \subseteq B$

б) $A \cup B = B$

в) $A \cap B = A$

г) $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Решение: Трябва да се покаже, че две по две твърденията са еквивалентни. Наивният начин е за всяка (ненаредена) двойка твърдения да се докаже желаната еквивалентност, примерно **а)** $\equiv$ **б)**, **а)** $\equiv$ **в)**, **а)** $\equiv$ **г)**, **б)** $\equiv$ **в)**, и т. н. Това би означавало да докажем общо $\frac{4.3}{2} = 6$ еквивалентности. По-икономичен начин е да докажем само четири извода:

а) $\vdash$ б), б) $\vdash$ в), в) $\vdash$ г), г) $\vdash$ а).

Защо това е достатъчно, ще стане ясно от следващ материал[†]. И така,

а) $\vdash$ **б)** Допускаме, че $A \subseteq B$. Трябва да покажем равенство между две множества, а именно $A \cup B$ и B. Ще го покажем на два етапа.

- $B \subseteq A \cup B$. Твърдението е очевиден аналог на извода $p \vdash p \vee q$ от съждителната логика.
- $A \cup B \subseteq B$. Нека p е съждението $x \in A$, а q е съждението $x \in B$. Трябва да докажем валидността на следствието q при предпоставки $p \to q$ (съответното на $A \subseteq B$) и $p \vee q$ (съответното на $A \cup B$). Ще ползваме еквивалентни преобразувания.
  1. $p \to q$ (предпоставка)
  2. $\neg p \vee q$ (от факта, че $u \to v \equiv \neg u \vee v$)
  3. $p \vee q$ (предпоставка)
  4. $q \vee q$ (резолюция върху (2.) и (3.))
  5. q (идемпотентност върху (4).)

б) $\vdash$ **в)** Нека p е съждението $x \in A$, а q е съждението $x \in B$. Трябва да докажем валидността на следствието $p \wedge q \leftrightarrow p$ (съответното на $A \cap B = A$) при предпоставка $p \wedge q \leftrightarrow q$ (соътветното на $A \cap B = B$). Чрез таблица ще покажем нещо повече: двете съждения са еквивалентни (с което, без да искаме, показваме и извода **в)** $\vdash$ **б)**).

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \leftrightarrow p$	$(p \vee q \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q \leftrightarrow p)$
F	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T

в) $\vdash$ **г)** Подходът е аналогичен. Нека p е съждението $x \in A$, а q е съждението $x \in B$. Ще покажем, че $(p \wedge q \leftrightarrow p) \equiv (\neg q \leftrightarrow \neg p)$. От предната таблица знаем, че колоната на $(p \wedge q \leftrightarrow p)$ е $\boxed{\mathsf{T\ T\ F\ T}}$. Тривиално е да се покаже, че $(\neg q \leftrightarrow \neg p)$ има същата колона.

г) $\vdash$ **а)** Използваме аналогичен подход. Доказателството се свежда до това да се покаже, че $\neg q \to \neg p \equiv p \to q$, което е добре известен факт (свойство на контрапозитивното). $\square$

[†]Причината е, че транзитивното затваряне на контур е пълната релация

Зад. 20 Нека $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Намерете множествата

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad \text{и} \quad \bigcap_{k=1}^{n} I_k$$

Зад. 21 Нека $J_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Нека $A_i = \mathbb{N} \setminus J_i$. Намерете множествата

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \text{и} \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

Зад. 22 Нека $A = \{1, 2, 4\}$ и $B = \{1\}$. Напишете в явен вид множествата 2^A и $2^{(2^B)}$.

Зад. 23 Нека $A = \{1, 2, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000\}$. Напишете в явен вид множеството $2^A \cap 2^B$.

Зад. 24 Нека $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{a, b, f, g\}$ и $C = \{3\}$. Напишете в явен вид $A \times B$, $A \times (B \times C)$, $2^A \cap A$, $2^A \cap 2^B$ и $(2^B \times 2^A) \cap 2^{A \times B \times C}$.

Зад. 25 Дайте пример за непразно множество, което е

1. елемент на своето степенно множество,
2. подмножество на своето степенно множество.

Задачи с декартово произведение

Декартовото произведение на две множества A и B е множеството

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Когато разглеждаме декартови произведения от някакви множества, винаги мислим, че съществува универсум, на когото множествата са подмножества. В задачите от типа "Докажете, че $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$" универсумът е множество от протоелементи. В задачите с декартово произведение универсумът има структура – примерно, универсумът за $A \times B$ е декартово произведение $U = U_1 \times U_2$ от два универсума, такива че A е подмножество на U_1 и B, на U_2.

Зад. 26 Напишете в явен вид декартовото произведение $A \times B$, където $A = \{1, 2, \{3\}\}$ и $B = \{a, b, \{1, a, b\}, \{c\}\}$.

Решение:

$$
\begin{aligned}
A \times B = \{&(1, a), (1, b), (1, \{1, a, b, c\}), (1, \{c\}),\\
&(2, a), (2, b), (2, \{1, a, b, c\}), (2, \{c\}),\\
&(\{3\}, a), (\{3\}, b), (\{3\}, \{1, a, b, c\}), (\{3\}, \{c\})\}
\end{aligned}
$$

□

Зад. 27 Докажете, че за всички множества A, B и C в сила са следните равенства:

а) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

б) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

в) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (A \times C)$.

г) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (A \times C)$.

Решение: Ще докажем **а)**. От лявата страна на знака за равенство имаме множество, състоящо се от наредени двойки. От дясната страна имаме множество, състоящо се от обединението на две множества, всяко от които е множество от наредени двойки. Универсумът в тази задача е някакво множество, да го наречем U, което е декартово произведение:

$$U = U_1 \times U_2$$

където U_1 е универсум по отношение на A (тоест, всеки елемент на A е елемент на U_1), а U_2 е универсум по отношение на B и C (всеки елемент на B е елемент на U_2 и всеки елемент на C е елемент на U_2). Твърдението, което искаме да докажем, е

$$\forall x \forall y (x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) \leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)) \tag{1}$$

където x взема стойности от U_1, а y, от U_2. Нека a е произволен елемент от U_1 и b е произволен елемент от U_2. Нека p е съждението $a \in A$, q е съждението $b \in B$ и r е съждението $b \in C$. Ще докажем, че

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r) \tag{2}$$

От верността на (2) следва верността на (1). Защо? – защото елементите a и b са взети **произволно**, следователно в (2) няма ограничение на общността – израз от вида (2) би имал същата форма за всички възможни вземания на елементи от U_1 и U_2.

Ще кажем същото нещо по друг начин: въпреки че (1) е израз от предикатната логика, а (2), от съждителната логика, ако докажем (2), с това доказваме и (1), тъй като за a и b няма никакви ограничения, следователно аналогично на (2) твърдение може да се направи за всеки елемент от U_1 и всеки елемент от U_2 – съвкупността от всички тези твърдения всъщност е (1).

Доказателството на (2) е тривиално:

$$
\begin{aligned}
&p \wedge (q \wedge r) \equiv \quad &&(\text{асоциативност})\\
&p \wedge q \wedge r \equiv &&(\text{идемпотентност})\\
&p \wedge p \wedge q \wedge r \equiv &&(\text{комутативност})\\
&p \wedge q \wedge p \wedge r \equiv &&(\text{асоциативност})\\
&(p \wedge q) \wedge (p \wedge r)
\end{aligned}
$$

$\square$

Забележете приликата и разликата между доказателството, че

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

което извършихме току-що, и доказателството, че

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C) \quad (3)$$

В (3) универсумът за A, B и C е едно и също U. Изразено чрез предикатна логика, твърдението е

$$\forall x (x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \in C)) \quad (4)$$

За произволно $a \in U$, нека u е съждението $a \in A$, v е съждението $a \in B$ и w е съждението $a \in C$. Да напишем израз от съждителната логика, от който да следва (4)

$$u \wedge (v \wedge w) \equiv (u \wedge v) \wedge (u \wedge w) \quad (5)$$

Очевидно, (5) има същата форма като (2).

От тези примери на пръв поглед изглежда, че декартовото произведение и сечението са в някакъв смисъл еквивалентни, понеже и на двете съответства логическия съюз конюнкция – доказването на (1), от една страна, и на (4), от друга страна, се свежда до доказването на едно и също съждение ((2) и (5) са едно и също нещо, написано по два начина). В действителност декартовото произведение и сечението са **принципно различни** операции върху множества. Ще илюстрираме разликата с два други примера. Да разгледаме равенството върху множества

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (6)$$

Това е един от двата закона за поглъщането, написан в термините на теорията на множествата. Написан в термините на предикатната логика, той изглежда така

$$\forall x (x \in X \wedge (x \in A \vee x \in B) \leftrightarrow x \in A)$$

Съответният израз от съждителната логика е

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad (7)$$

Сега да разгледаме твърдението (очевидно невярно)

$$A \times (A \cup B) = A \quad (8)$$

което се получава от (6) чрез замяна на "$\cap$" с "$\times$". Забележете, че изразът от съждителната логика, съответстващ на (8), **<u>не е</u>** (7), а е

$$p \wedge (s \vee t) \equiv p \quad (9)$$

който със сигурност е лъжа. Защо изразът от съждителната логика, съответстващ на (8), е (9), а не (7)? Защото (8), написан в предикатна логика, е

$$\forall x \forall y (x \in A \wedge (y \in A \vee y \in B) \leftrightarrow x \in A)$$

където x и y вземат стойности от някакви подходящи домейни. За да напишем съответен израз от съждителната логика, трябва да използваме **различни** съждителни променливи за $x \in A$ и $y \in A$, понеже говорим за съответно първия и втория елемент от наредените двойки (елементите на декартовото произведение).

Зад. 28 Докажете, че $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Зад. 29 Докажете, че декартовото произведение $A \times B$ не е комутативно. При какви условия за A и B имаме комутативност?