Примерни решения на изпита-задачи по Дискр. Стр-ри на спец. КН, 1 курс, 2 поток, ФМИ-СУ,
14 фев. 2021 г.

---

**Задача 1.** Решете рекурентното уравнение

$$T(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{ако } n = 1; \\ T(n-1) + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, & \text{ако } n > 1. \end{cases}$$

**Решение :** Уравнението **не може** да бъде решено с метода с характеристичното уравнение, защото нехомогенната част не е от правилния вид. Да намерим $T(n)$ за малки стойности на $n$. За $n = 1, 2, 3, 4$ имаме съответно $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}$. Допускаме, че $T(n) = \frac{n}{2n+1}$, и доказваме това по индукция.

**База:** Разглеждаме твърдението за $n = 1$ и забелязваме, че $T(1) = \frac{1}{3}$ по определение, а, от друга страна, $\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$. ✓

**Индуктивно предположение:** Допускаме, че $T(n) = \frac{n}{2n+1}$ за някое $n \geqslant 1$.

**Индуктивна стъпка:** Ще докажем, че $T(n+1) = \frac{n+1}{2n+3}$. По определение, $T(n+1) = T(n) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. Използвайки индуктивното предположение, заместване $T(n)$ с $\frac{n}{2n+1}$ и твърдението, което трябва да докажем, става $\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$. Наистина,

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1}\left(n + \frac{1}{2n+3}\right) =$$
$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2n^2+3n+1}{2n+3} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Доказахме верността на твърдението в индуктивната стъпка. ✓ □

**Задача 2.** Нека $n \in \mathbb{N}$. Докажете тъждеството

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

**Решение :** Тъй като $\binom{n}{k} = 0$ при $n < k$, лявата страна е еквивалентна на $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$. Ще докажем, че

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \tag{1}$$

Умножаваме по $n+1$ двете страни:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = 2^{n+1}-1. \tag{2}$$

Но

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n+1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$

така че (2) е еквивалентно на

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = 2^{n+1}-1, \tag{3}$$

което на свой ред е еквивалентно на

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}\right) + 1 = 2^{n+1}. \tag{4}$$

Но

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{1 \leqslant k+1 \leqslant n+1} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k}$$

така че (4) е еквивалентно на

$$\left( \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \right) + 1 = 2^{n+1}. \tag{5}$$

Знаем, че $\binom{n+1}{0} = 1$, така че имаме право да запишем (5) като

$$\left( \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \right) + \binom{n+1}{0} = 2^{n+1}, \tag{6}$$

което може да се запише просто

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}. \tag{7}$$

И така, достатъчно е да докажем (7). Но (7) е директно следствие от теоремата на Newton:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 1^k 1^{n+1-k} = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1}.$$

С което доказахме тъждеството. ✓ □

**Задача 3.** Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Нека $A_n$ е множеството от пермутациите на $\{1, 2, \ldots, n\}$. Нека $B_n$ множеството от наредените $n$-орки от естествени числа, такива че елементът на позиция $i$ взема стойности от $\{1, 2, \ldots, i\}$.

*1 т.* 1. Докажете, че $|B_n| = n!$.

*1 т.* 2. Колко биекции $f : A_n \to B_n$ има?

*18 т.* 3. Опишете една такава биекция. Иска се да предложите алгоритъм, който по дадена пермутация от $A_n$ генерира $n$-орка от $B_n$, като различни пермутации се изобразяват в различни $n$-орки и всяка $n$-орка е образ на някоя пермутация.

**Решение :** Твърдение (1) може лесно да се докаже по индукция по $n$. Базовият случай е $n = 1$, в който очевидно $|B_1| = 1$, а, от друга страна, $1! = 1$. Ако допуснем твърдението за стойност на аргумента $n$, то за стойност на аргумента $n+1$ очевидно $B_{n+1} = B_n \cdot (n+1)$; тъй като сме допуснали, че $B_n = n!$, то $B_{n+1} = n! \cdot (n+1)$, или по-просто, $B_{n+1} = (n+1)!$. ✓

Тъй като $|A_n| = n!$ и $|B_n| = n!$, броят на биекциите в (2) е $(n!)!$. ✓

Съществуват много решения на (3), но най-очевидното сякаш е следното. Разглеждаме произволна $n$-орка $\mathbf{b} \in B_n$. За числото на последната позиция, да го наречем $b_n$, има $n$ възможности; по условие, $1 \leqslant b_n \leqslant n$. В нашето решение, $b_n$ е адресът на числото $n$ в пермутацията, която искаме да опишем недвусмислено. Знаем, че пермутацията има точно едно $n$ в себе си, което може да се намира на позиция 1 или позиция 2 или …или позиция $n$. И така, $b_n$ ни казва къде е $n$ в пермутацията.

Ключовото наблюдение е, че след като фиксираме числото $n$ в пермутацията, тя остава със само $n-1$ незаети позиции и е достатъчно да опишем какво има на тези $n-1$ нейни позиции, за да я опишем напълно. Следохме задачата за стойност на аргумента $n$ до задача за стойност на аргумента $n-1$. Това е рекурсивно решение. Рано или късно, аргументът ще стане единица, при което “задействаме” базата на рекурсията; а именно, слагаме числото 1 на единствената възможна позиция и приключваме. □

**Задача 4.** По колко различни начина можете да раздадете 101 различни билета на 51 човека, така че всеки човек да получи поне един билет? Всеки два билета са различни.

**Решение :** Решението е броят на сюрекциите от 101-елементен домейн в 51-елементен кодомейн. Съгласно изучаваното на лекции, това е

$$\sum_{k=0}^{51} (-1)^k \binom{51}{k} (51-k)^{101} \tag{8}$$

По-точно решение на изпита не се очаква. □

**Задача 5.** Дадено е множество $M$ от $n$ човека. Нека $\Pi(M)$ е множеството от разбиванията на $M$.

В ден $X$ някои от тези хора враждуват помежду си, а други не враждуват. Формално, в ден $X$ има релация на враждуване $R$, такава че $\forall a, b \in M : aRb$ тогава и само тогава, когато $a$ враждува с $b$. $R$ е симетрична и антирефлексивна. Нека $\Pi'(M) = \{z \in \Pi(M) \,|\, (\forall w \in z\ \forall a \in w\ \forall b \in w : \neg aRb)\}$. Нека $k = \min\{|z| : z \in \Pi'(M)\}$.

На следващия ден враждуването се променя. А именно, в деня $X+1$ релацията на враждуване е $Q = (M^2 \backslash R) \backslash \{(a,a) \,|\, a \in M\}$. Нека $\Pi''(M) = \{z \in \Pi(M) \,|\, (\forall w \in z\ \forall a \in w\ \forall b \in w : \neg aQb)\}$. Нека $\ell = \min\{|z| : z \in \Pi''(M)\}$.

*5 т.* 1. Изразете $k$ и $\ell$ на езика на теорията на графите.

*25 т.* 2. Докажете, че $k\ell \geqslant n$.

**Решение :** Първо разсъждаваме за ден $X$. Конструираме граф $G$, чието множество от върхове е $M$ и между всеки два върха има ребро тстк тези хора враждуват. Графът е обикновен, защото враждуването е симетрично (неориентирани ребра) и антирефлексивно (няма примки). Числото $k$ е хроматичното число на графа, защото е минималната мощност на разбиване на върховете на антиклики; тоест $k = \chi(G)$.

Сега разсъждаваме за ден $X+1$. Конструираме аналогично граф за него и забелязваме, че този граф е $\overline{G}$. Числото $\ell$ е неговото хроматично число; тоест $\ell = \chi(\overline{G})$.

Иска се да докажем, че $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geqslant n$. Щом $k = \chi(G)$ и $\ell = \chi(\overline{G})$, то съществуват множества $C$ и $D$, такива че $|C| = k$ и $|D| = \ell$ и оцветявания $f : V \to C$ и $g : V \to D$ съответно на $G$ и $\overline{G}$.

Нека $E'$ е множеството от ребрата на $\overline{G}$. Конструираме графа $\widetilde{G} = (V, \widetilde{E})$, където $\widetilde{E} = E \cup E'$. Очевидно $\widetilde{G}$ е пълен граф на $n$ върха, но е именуван граф. Да разгледаме $h : V \to C \times D$, дефинирана така:

$$\forall u \in V : h(u) = (f(u), g(u))$$

Твърдим, че $h$ е оцветяване на $\widetilde{G}$. Да разгледаме произволно ребро $e = (u,v)$ на $\widetilde{G}$, което е същото като да разгледаме произволно двуелементно подмножество $\{u,v\}$ на $V$. Очевидно е, че или $e \in E$, или $e \in E'$.

- Ако $e \in E$, то $h(u) \neq h(v)$, понеже $f(u) \neq f(v)$, а $h(u) = (f(u), g(u))$ и $h(v) = (f(v), g(v))$.
- Ако $e \in E'$, то $h(u) \neq h(v)$, понеже $g(u) \neq g(v)$, а $h(u) = (f(u), g(u))$ и $h(v) = (f(v), g(v))$.

Щом краищата на всяко ребро на $\widetilde{G}$ получават различни цветове от $h$, то $h$ е оцветяване на $\widetilde{G}$. Нещо повече, $h$ е оцветяване на $\widetilde{G}$ в $k\ell$ цвята, защото $|C \times D| = |C| \cdot |D|$ съгласно комбинаторния принцип на умножението, а $|C| \cdot |D| = k\ell$.

Но $\widetilde{G}$ е пълен граф на $n$ върха, откъдето веднага следва, че $\chi(\widetilde{G}) = n$. Това влече, че $k\ell \geqslant n$, понеже, ако допуснем, че $k\ell < n$, то чрез $h$ ние сме конструирали оцветяване на пълен граф на $n$ върха с по-малко от $n$ цвята, което е очевидно невъзможно. □

**Задача 6.** Дадено е изброимо безкрайно множество $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ от прости съждения. Правим индуктивна дефиниция на множество $L$ от съждения, както и на функция $f : L \to 2^P$.

- $\forall k \in \mathbb{N}^+ : p_k \in L$. Освен това, $f(p_k) = \{p_k\}$.
- Нека $\phi \in L$ и $\psi \in L$, като $f(\phi) \cap f(\psi) = \varnothing$. Тогава $(\phi \oplus \psi) \in L$ и $f((\phi \oplus \psi)) = f(\phi) \cup f(\psi)$.

Тук "$\oplus$" означава изключващо-или. Докажете или опровергайте, че съществува $x \in L$, такова че $x$ е тавтология или $x$ е противоречие.

**Решение:** В $L$ не съществува нито тавтология, нито противоречие. Това ще докажем, доказвайки, че всяко съждение в $L$ е условност. Доказателството е със структурна индукция по определението на $L$.

**База.** Всяко $p_k$ в базата на определението е условност, защото има валюация, при която $p_k = \mathsf{True}$, и има валюация, при която $p_k = \mathsf{False}$.

**Индуктивно предположение.** Да допуснем, че $\phi$ и $\psi$ в индуктивната стъпка на определението са условности. С други думи, има валюация $v_1 : f(\phi) \to \{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$, за която $\phi$ е $\mathsf{True}$, има валюация $v_2 : f(\phi) \to \{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$, за която $\phi$ е $\mathsf{False}$, има валюация $w_1 : f(\psi) \to \{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$, за която $\psi$ е $\mathsf{True}$ и има валюация $w_2 : f(\psi) \to \{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}$, за която $\psi$ е $\mathsf{False}$.

**Индуктивна стъпка.** Разглеждаме $(\phi \oplus \psi)$ от индуктивната стъпка. Ще покажем, че това съждение е условност, използвайки факта, че $\phi$ и $\psi$ нямат общи прости съждения ("$f(\phi) \cap f(\psi) = \varnothing$" казва точно това – че $\phi$ и $\psi$ нямат общи прости съждения). Тогава, съгласно определението на съюза "$\oplus$",

- при валюацията на $f(\phi) \cup f(\psi)$, която се получава от $v_1$ и $w_2$, съждението $(\phi \oplus \psi)$ е $\mathsf{True}$. Валюациите $v_1$ и $w_2$ са независими, защото $\phi$ и $\psi$ нямат общи прости съждения.
- при валюацията на $f(\phi) \cup f(\psi)$, която се получава от $v_1$ и $w_1$, съждението $(\phi \oplus \psi)$ е $\mathsf{False}$. Валюациите $v_1$ и $w_1$ са независими, защото $\phi$ и $\psi$ нямат общи прости съждения. $\square$