Решение на една комбинаторна задача

Минко Марков

11 ноември 2012 г.

Колко решения в има уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16$$

такива че $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$?

Задачата е същата като задачата, по колко начина можем да сложим 16 неразличими топки в 3 различни кутии. Решението е

$$\binom{16+3-1}{3-1} = 153$$

Задачата има геометрична интепретация. Системата от условия

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16 \tag{1}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{2}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{3}$$
$$x_3 \geq 0 \tag{4}$$

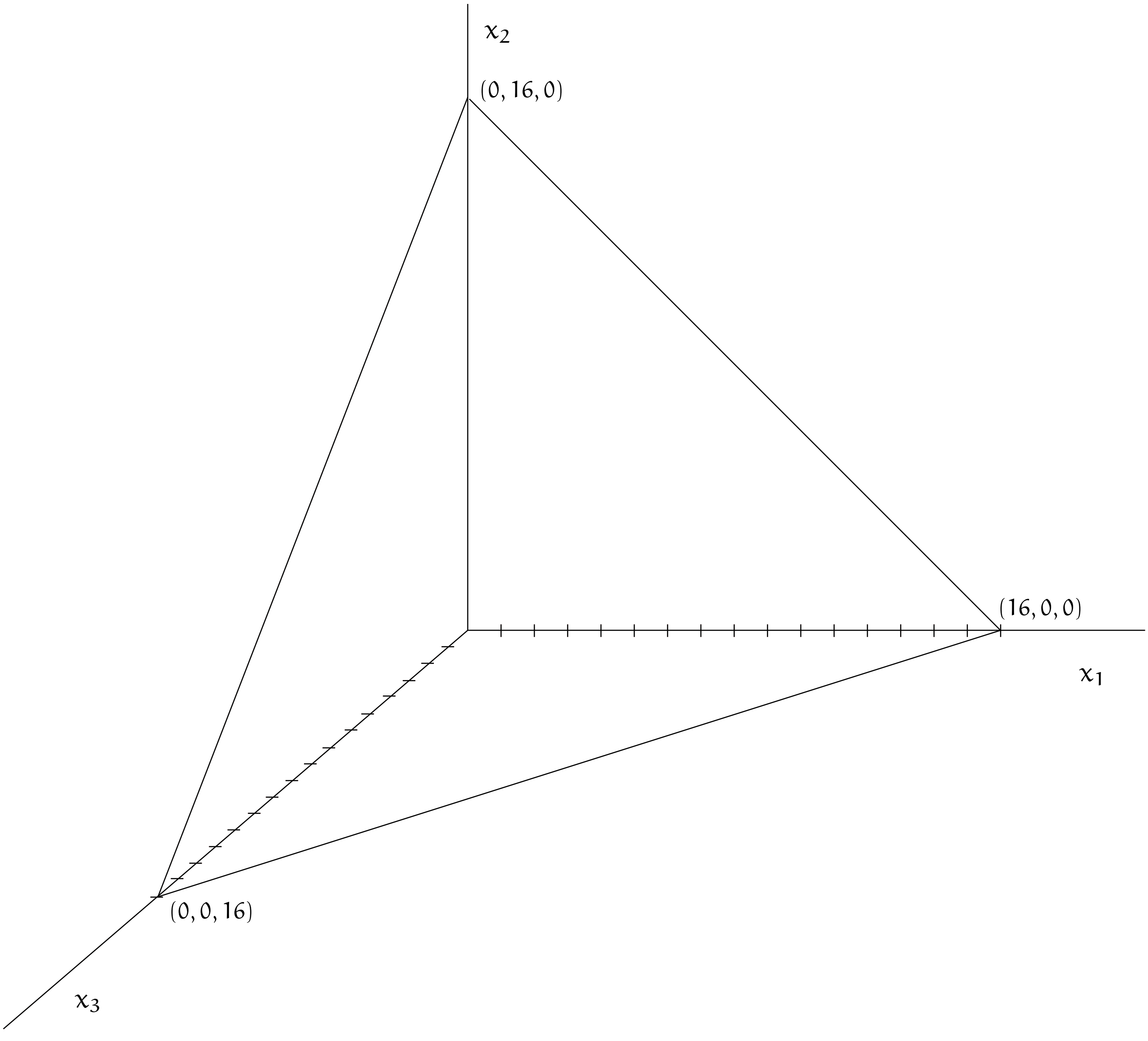
определят триъгълник с върхове точките $(16, 0, 0)$, $(0, 16, 0)$ и $(0, 0, 16)$, показан на Фигура 1. Целочислените решения на системата (1)–(4) са 153-те точки, показани на Фигура 2 в синьо.

Да усложним задачата така: колко са целочислените решения на системата

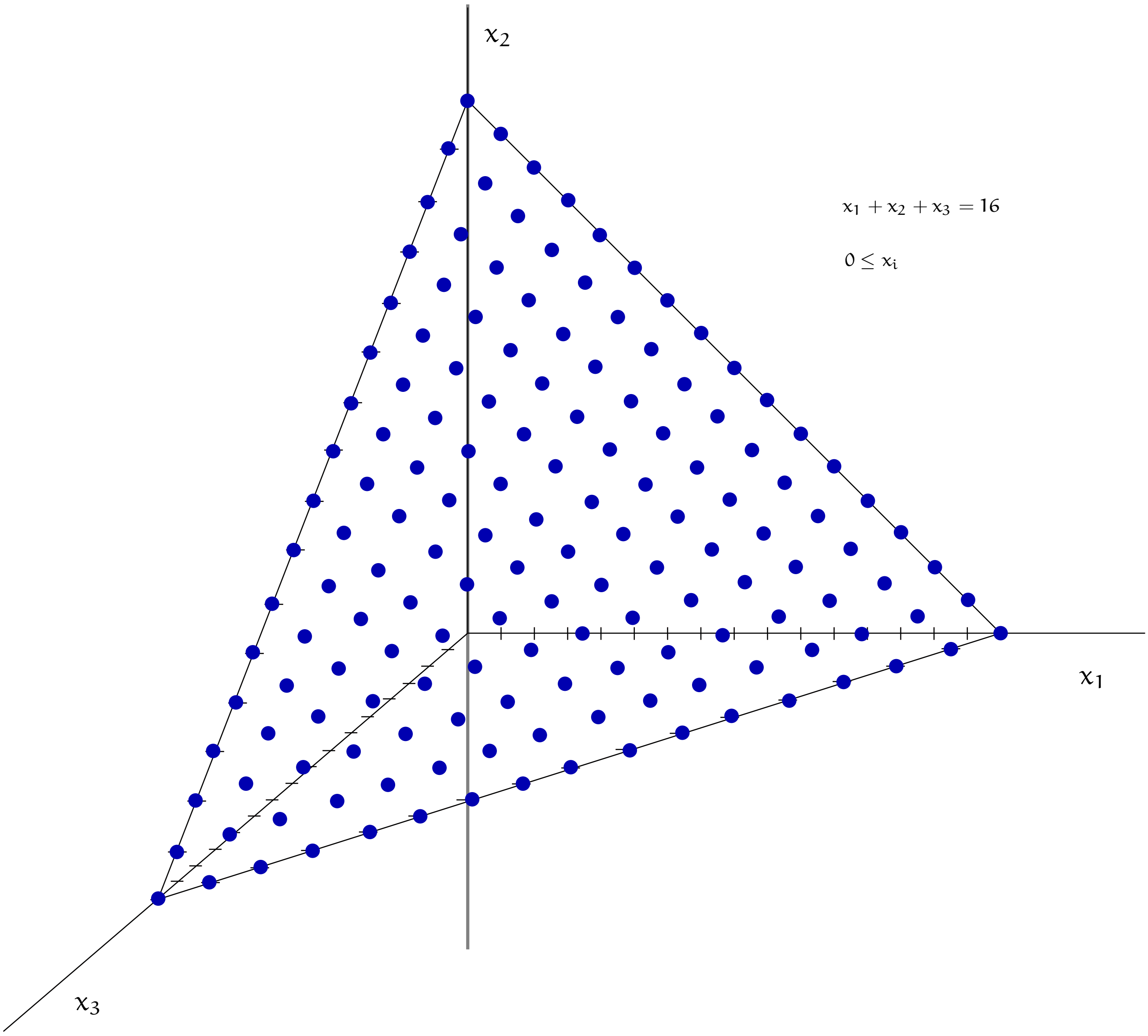
$$x_1 + x_2 + x_3 = 16 \tag{5}$$
$$10 \geq x_1 \geq 0 \tag{6}$$
$$10 \geq x_2 \geq 0 \tag{7}$$
$$10 \geq x_3 \geq 0 \tag{8}$$

Нека n е търсеното число. Ще използваме принципа на включването и изключването. Нека U е множеството от решенията на (1)–(4), 153 на брой. Нека B_i е множеството от решения на (1)–(4), такива че $x_i > 10$ за $1 \leq i \leq 3$. Очевидно всички B_i са с еднаква мощност. Съгласно принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned} n = |U| - &\\ &(|B_1| + |B_2| + |B_3|) + \\ &(\underbrace{|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_2 \cap B_3|}_{0}) - \\ &(\underbrace{|B_1 \cap B_2 \cap B_3|}_{0}) \end{aligned}$$



Фигура 1



Фигура 2

Лесно се вижда, че двете последни събираеми в израза за n са нули, понеже $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ и т. н. Тогава

$$n = |U| - 3|B_1|$$

Да намерим $|B_1|$. Да положим $y = x_1 - 11$ в (1)–(4). Щом $x_1 \geq 11$, то $y \geq 0$. Заместваме x_1 с $y + 11$ в (1) и получаваме

$$y + 11 + x_2 + x_3 = 16 \leftrightarrow y + x_2 + x_3 = 5$$

при ограниченията: $y \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Да се преименуваме y на x_1. Показахме, че броят на целочислените решения на (1)–(4), такива че $x_1 > 10 \leftrightarrow x_1 \geq 11$ е равен на броя на целочислените решения на

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \tag{9}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{10}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{11}$$
$$x_3 \geq 0 \tag{12}$$

без други ограничения. Тази задача е същата като задачата, по колко начина можем да сложим 5 неразличими топки в 3 различни кутии. Решението е

$$B_1 = \binom{5+3-1}{3-1} = 21$$

Следователно, $B_1 = 21$ и

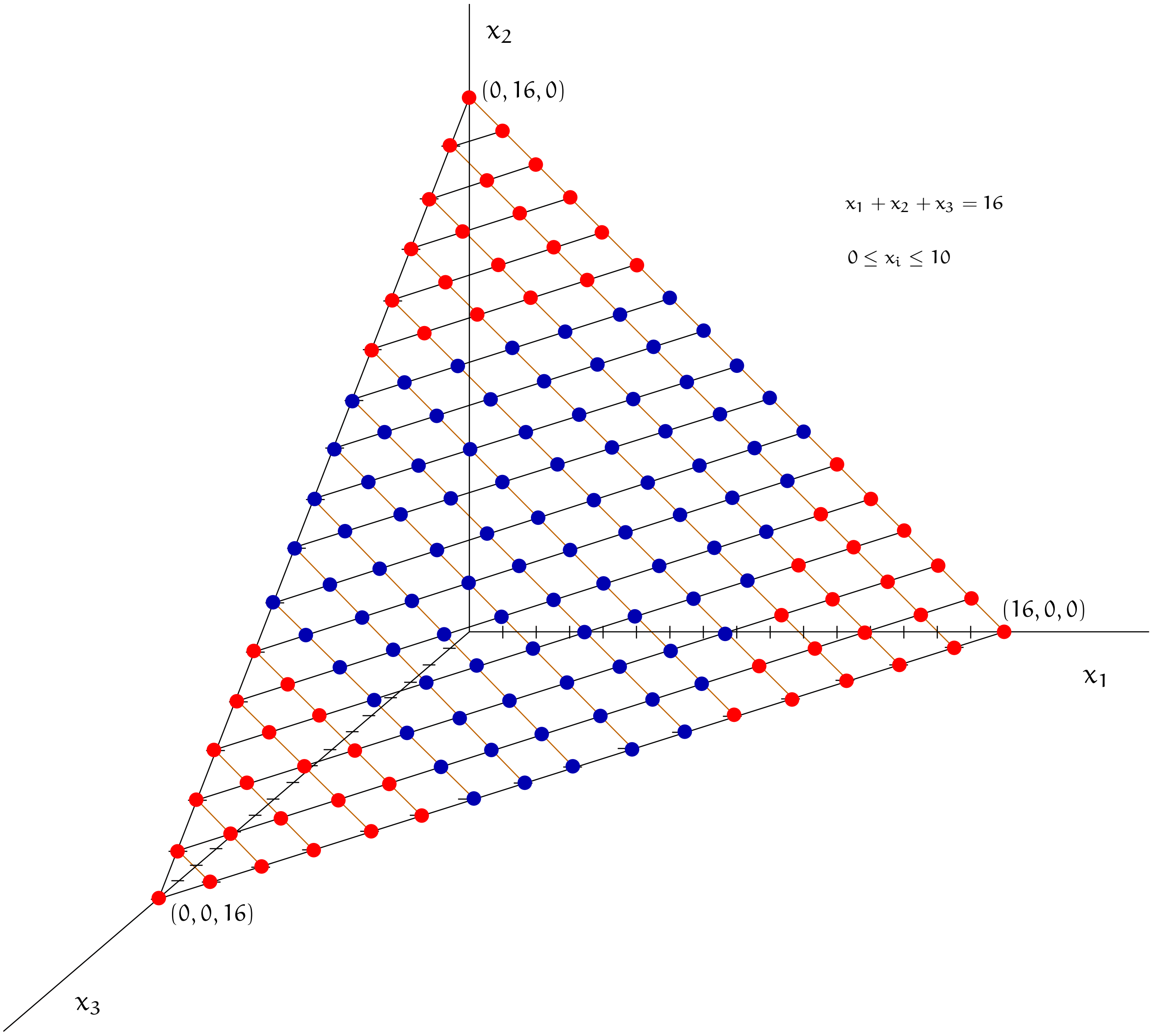
$$n = 153 - 3 \times 21 = 90$$

Този вариант на задачата също има геометрична интерпретация. Системата от условия (5)–(9) има решение, състоящо се от (същинско) подмножество на точките от Фигура 2. А именно, от точките на Фигура 2 трябва да махнем тези, които имат поне една координата, по-голяма или равна на 11. Лесно се съобразява, че решението на (5)–(9) са сините точки на Фигура 3, а червените точки на нея са точките с поне една координата, по-голяма или равна на 11. Сините точки са точно 90, а червените са групирани в три триъгълника, всеки отговарящ на едно от множествата B_i и имащ точно 21 точки. Големият триъгълник (с върхове $(16, 0, 0)$, $(0, 16, 0)$ и $(0, 0, 16)$) е покрит с мрежа от две групи линии, кафяви и черни, за удобство на читателя – за да е по-лесно да се съобрази, коя цветна точка какви координати има.

Да разгледаме трети вариант на същата задача: колко са целочислените решения на системата

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16 \tag{13}$$
$$7 \geq x_1 \geq 0 \tag{14}$$
$$7 \geq x_2 \geq 0 \tag{15}$$
$$7 \geq x_3 \geq 0 \tag{16}$$

Нека m е търсеното число. Отново ползваме принципа на включване и изключване. Универсумът е същият U с $|U| = 153$. Нека C_i е множеството от решения на (1)–(4), такива че



Фигура 3

$x_i > 7$ за $1 \leq i \leq 3$. Имаме

$$\begin{aligned} m = |U| - & \\ & (|C_1| + |C_2| + |C_3|) + \\ & (|C_1 \cap C_2| + |C_1 \cap C_3| + |C_2 \cap C_3|) - \\ & (\underbrace{|C_1 \cap C_2 \cap C_3|}_{0}) \end{aligned}$$

В този вариант на задачата, множествата $C_i \cap C_j$ за $i \neq j$ не са празни, тъй като е възможно две от променливите да са по-големи или равни на 8. Ясно е, че всички C_i са с еднаква мощност и всички $C_i \cap C_j$ са с еднаква мощност. Следователно, решението е

$$m = |U| - 3|C_1| + 3|C_1 \cap C_2|$$

С разсъждения, аналогични на тези за $|B_1|$, намираме

$$|C_1| = \binom{(16-8)+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

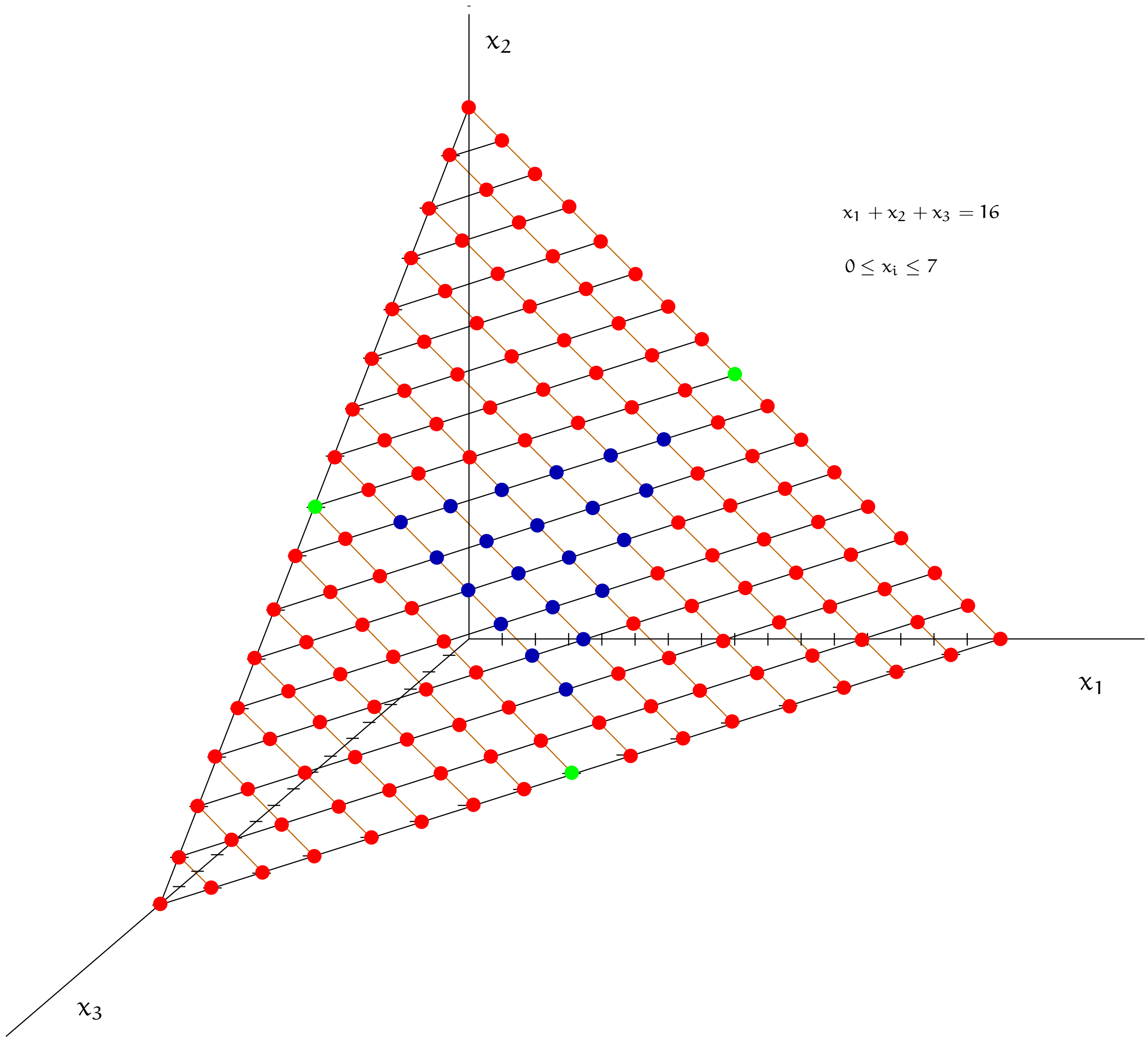
и

$$|C_1 \cap C_2| = \binom{(16-2\times 8)+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$$

Бърза проверка показва, че последното равенство е истина, понеже $C_1 \cap C_2 = \{(8,8,0)\}$, $C_1 \cap C_3 = \{(8,0,8)\}$ и $C_2 \cap C_3 = \{(0,8,8)\}$. Тогава

$$m = 153 - 3 \times 45 + 3 \times 1 = 21$$

Фигура 4 илюстрира решението на задачата в този вариант. Точките, чиито координати удовлетворяват (13)–(16), са сините точки в центъра на големия триъгълник, 21 на брой. “Неблагоприятните” точки са червените точки отстани, както и трите зелени точки с координати $(8,8,0)$, $(8,0,8)$ и $(0,8,8)$. Последните имат особен статут, защото принадлежат на обединението на трите червени триъгълника. Както видяхме, събираемото $C_1 \cap C_2 + C_1 \cap C_3 + C_2 \cap C_3$ от израза за включването и изключването брои именно тези три точки.



Фигура 4