Решение на задачата от домашното на 6та група

4 ноември 2010 г.

Задача 1. *Да се докаже по индукция, че*

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Решение:

База За $n = 1$ твърдението е $F_0F_2 - F_1^2 = (-1)^1 \Leftrightarrow 0.1 - 1^2 = -1$, което е очевидно вярно.

Индукционно предположение Допускаме, че $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ за някое $n \in \mathbb{N}^+$.

Индукционна стъпка

$$
\begin{aligned}
&F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = \textit{(съгласно деф. на числа на Фибоначи)}\\
&F_n(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 =\\
&F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2 =\\
&F_n^2 + F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) = \textit{(от деф. на числа на Фибоначи)}\\
&F_n^2 + F_{n+1}(-F_{n-1}) =\\
&F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} =\\
&(-1).(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) = \textit{(съгласно индукц. предположение)}\\
&(-1).(-1)^n =\\
&(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

$\square$