Решение на първата задача за домашна работа
Дискретна Математика
3-та и 6-та група, Информатика, ФМИ, СУ

Минко Марков

24 октомври 2009

Задачата е: Да се реши, използвайки принципа на включване и изключване, колко са нечетните числа от интервала $[1000, 10000]$*, които нямат повтарящи се цифри*[†]*. За универсум да се вземе множеството* U *от всички нечетни числа от интервала. Задачата „струва“* 10 *точки.*

Решение
Да означим с S множеството от нечетните числа от интервала $[1000, 10000]$, които нямат повтарящи се цифри. За всяко нечетно число от $x \in S$, очевидно x се представя в десетична бройна система като

$$x = a_1\, a_2\, a_3\, a_4$$

където $a_1 \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $a_2, a_3 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a_4 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Нека:

- B_1 е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_2$,
- B_2 е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_3$,
- B_3 е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_4$,
- B_4 е множеството от числата от U, за които $a_2 = a_3$,
- B_5 е множеството от числата от U, за които $a_2 = a_4$,

[†] В десетична позиционна бройна система.

- B_6 е множеството от числата от U, за които $a_3 = a_4$.

В час тези множества бяха означени съответно с $A_{1,2}, \ldots, A_{3,4}$. По-добре е да бъдат означени с един индекс, както е примерно B_1, тъй като те са „първичните“ множества при прилагане на принципа на включване и изключване. Имам предвид, че очевидно:

$$S = U \setminus \big(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6\big)$$

По принципа на включване и изключване:

$$\begin{aligned}
|S| = |U| & \qquad\qquad (1)\\
&- (|B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| + |B_5| + |B_6|)\\
&+ \big(|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_1 \cap B_4| +\\
&\quad |B_1 \cap B_5| + |B_1 \cap B_6| + |B_2 \cap B_3| +\\
&\quad |B_2 \cap B_4| + |B_2 \cap B_5| + |B_2 \cap B_6| +\\
&\quad |B_3 \cap B_4| + |B_3 \cap B_5| + |B_3 \cap B_6| +\\
&\quad |B_4 \cap B_5| + |B_4 \cap B_6| + |B_5 \cap B_6|\big)\\
&- \big(|B_1 \cap B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_4| + |B_1 \cap B_2 \cap B_5| +\\
&\quad |B_1 \cap B_2 \cap B_6| + |B_1 \cap B_3 \cap B_4| + |B_1 \cap B_3 \cap B_5| +\\
&\quad |B_1 \cap B_3 \cap B_6| + |B_1 \cap B_4 \cap B_5| + |B_1 \cap B_4 \cap B_6| +\\
&\quad |B_1 \cap B_5 \cap B_6| + |B_2 \cap B_3 \cap B_4| + |B_2 \cap B_3 \cap B_5| +\\
&\quad |B_2 \cap B_3 \cap B_6| + |B_2 \cap B_4 \cap B_5| + |B_2 \cap B_4 \cap B_6| +\\
&\quad |B_2 \cap B_5 \cap B_6| + |B_3 \cap B_4 \cap B_5| + |B_3 \cap B_4 \cap B_6| +\\
&\quad |B_3 \cap B_5 \cap B_6| + |B_4 \cap B_5 \cap B_6|\big)\\
&+ \big(|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_5| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_6| +\\
&\quad |B_1 \cap B_2 \cap B_4 \cap B_5| + |B_1 \cap B_2 \cap B_4 \cap B_6| + |B_1 \cap B_2 \cap B_5 \cap B_6| +\\
&\quad |B_1 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5| + |B_1 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_6| + |B_1 \cap B_3 \cap B_5 \cap B_6| +\\
&\quad |B_1 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6| + |B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5| + |B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_6| +\\
&\quad |B_2 \cap B_3 \cap B_5 \cap B_6| + |B_2 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6| + |B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6|\big)\\
&- \big(|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_6| +\\
&\quad |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_5 \cap B_6| + |B_1 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6| +\\
&\quad |B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6|\big)\\
&+ |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6|
\end{aligned}$$

Нека дефинираме, че:

- $A_{1,2,3}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_2 = a_3$,

- $A_{1,2,4}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_2 = a_4$,
- $A_{1,3,4,}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_3 = a_4$,
- $A_{2,3,4}$ е множеството от числата от U, за които $a_2 = a_3 = a_4$,
- $A_{1,2,3,4}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Очевидно:

$$
\begin{aligned}
|A_{1,2}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1=a_2} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_3} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_4} = 450\\
|A_{1,3}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1=a_3} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_2} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_4} = 450\\
|A_{1,4}| &= \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_1=a_4} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_2} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_3} = 500\\
|A_{2,3}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_2=a_3} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_4} = 450\\
|A_{2,4}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_3} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_2=a_4} = 450\\
|A_{3,4}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_2} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_3=a_4} = 450\\
|A_{1,2,3}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1=a_2=a_3} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_4} = 45\\
|A_{1,2,4}| &= \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_1=a_2=a_4} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_3} = 50\\
|A_{1,3,4}| &= \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_1=a_3=a_4} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_2} = 50\\
|A_{2,3,4}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_2=a_3=a_4} = 45\\
|A_{1,2,3,4}| &= 5 \text{ тъй като } A_{1,2,3,4} = \{1111, 3333, 5555, 7777, 9999\}
\end{aligned}
$$

В час показахме, че:

$$|U| = 4500 \tag{2}$$

За сумата от големините на множествата имаме:

$$\sum |B_i| = 5 \times 450 + 500 = 2750 \tag{3}$$

Сега търсим сумата от големините на сеченията две по две. Лесно е да се съобрази, че:

$$B_1 \cap B_2 = A_{1,2,3}$$
$$B_1 \cap B_3 = A_{1,2,4}$$
$$B_1 \cap B_4 = A_{1,2,4}$$
$$B_1 \cap B_5 = A_{1,2,4}$$
$$B_2 \cap B_3 = A_{1,3,4}$$
$$B_2 \cap B_4 = A_{1,2,3}$$
$$B_2 \cap B_6 = A_{1,3,4}$$
$$B_3 \cap B_5 = A_{1,2,4}$$
$$B_3 \cap B_6 = A_{1,3,4}$$
$$B_4 \cap B_5 = A_{2,3,4}$$
$$B_4 \cap B_6 = A_{2,3,4}$$
$$B_5 \cap B_6 = A_{2,3,4}$$

Веднага следва, че:

$$|B_1 \cap B_2| = 45$$
$$|B_1 \cap B_3| = 50$$
$$|B_1 \cap B_4| = 45$$
$$|B_1 \cap B_5| = 50$$
$$|B_2 \cap B_3| = 50$$
$$|B_2 \cap B_4| = 45$$
$$|B_2 \cap B_6| = 50$$
$$|B_3 \cap B_5| = 50$$
$$|B_3 \cap B_6| = 50$$
$$|B_4 \cap B_5| = 45$$
$$|B_4 \cap B_6| = 45$$
$$|B_5 \cap B_6| = 45$$

Остава да определим $|B_1 \cap B_6|$, $|B_2 \cap B_5|$ и $|B_3 \cap B_4|$ при сеченията две по две. $B_1 \cap B_6$ е множеството от числата с $a_1 = a_2$ и $a_3 = a_4$ – то не е едно от $A_{i,j}$ или $A_{i,j,k}$. $|B_1 \cap B_6| = 9 \times 5 = 45$ заради 9-те възможности за $a_1 = a_2$ и независимите 5 възможности за $a_3 = a_4$. $|B_2 \cap B_5| = 9 \times 5 = 45$ заради 9-те възможности за $a_1 = a_3$ и независимите 5 възможности за $a_2 = a_4$. $|B_3 \cap B_4| = 10 \times 5 = 50$ заради 10-те възможности за $a_2 = a_3$ и независимите 5 възможности за $a_1 = a_4$. Общо за сумата от големините на сеченията две по две имаме:

$$\sum |B_i \cap B_j| = 8 \times 45 + 7 \times 50 = 710 \tag{4}$$

Сега търсим сумата от големините на сеченията по тройки. Лесно е да се съобрази, че:

$$\begin{aligned}
&B_1 \cap B_2 \cap B_3 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_2 \cap B_4 = A_{1,2,3}\\
&B_1 \cap B_2 \cap B_5 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_2 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_3 \cap B_4 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_3 \cap B_5 = A_{1,2,4}\\
&B_1 \cap B_3 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_4 \cap B_5 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_4 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_5 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_2 \cap B_3 \cap B_4 = A_{1,2,3,4}\\
&B_2 \cap B_3 \cap B_5 = A_{1,2,3,4}\\
&B_2 \cap B_3 \cap B_6 = A_{1,3,4}\\
&B_2 \cap B_4 \cap B_5 = A_{1,2,3,4}\\
&B_2 \cap B_4 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_2 \cap B_5 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_3 \cap B_4 \cap B_5 = A_{1,2,3,4}\\
&B_3 \cap B_4 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_3 \cap B_5 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_4 \cap B_5 \cap B_6 = A_{2,3,4}
\end{aligned}$$

Общо за сумата от големините на сеченията по тройки имаме:

$$\sum |B_i \cap B_j \cap B_k| = 16 \times 5 + 2 \times 45 + 2 \times 50 = 270 \tag{5}$$

Сега търсим сумата от големините на сеченията по четворки. Всички сечения по четворки са равни на $A_{1,2,3,4}$, тоест:

$$B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_l = A_{1,2,3,4}$$

Общо за сумата от големините на сеченията по четворки имаме:

$$\sum |B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_l| = 15 \times 5 = 75 \tag{6}$$

Сега търсим сумата от големините на сеченията по петорки. Всички сечения по петорки също са равни на $A_{1,2,3,4}$, тоест:

$$B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_l \cap B_m = A_{1,2,3,4}$$

Общо за сумата от големините на сеченията по четворки имаме:

$$\sum |B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_l \cap B_m| = 6 \times 5 = 30 \tag{7}$$

Сечението на всичките шест множества $B_1, \ldots, B_6$ е:

$$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}$$

Големината му е:

$$|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6| = 5 \tag{8}$$

Заместваме (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) в (1) и получаваме

$$|S| = 4500 - 2750 + 710 - 270 + 75 - 30 + 5 = 2240$$

$\square$