Комбинаторика

1 Индукция

Зад. 1: Докажете по индукция, че за всяко крайно непразно множество A, броят на подмножествата на A с четен брой елементи е равен на броя на подмножествата с нечетен брой елементи.

Решение: Нека 2^A степенното множество на A. Дефинираме, че:

$$2^A_e = \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е четно число.}\}$$
$$2^A_o = \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е нечетно число.}\}$$

Задачата се състои в това, да се докаже, че $\forall A$, такова че $A \neq \emptyset$, $|2^A_e| = |2^A_o|$. Доказателството е с индукция по $|A|$.
База: $|A| = 1$. Тогава

$$2^A = \{\emptyset, A\}$$

Очевидно

$$2^A_e = \{\emptyset\}$$
$$2^A_o = \{A\},$$

така че $|2^A_e| = |2^A_o|$ е вярно.
Индуктивна хипотеза: Нека твърдението е вярно за всяко множество A, такова че $|A| = n$. Тоест,

$$\forall A, \text{ такова че } |A| = n \colon |2^A_o| = |2^A_e| \tag{1}$$

Индуктивна стъпка: Разглеждаме произволно множество A, такова че $|A| = n + 1$. Нека a е произволен елемент на A. Очевидно 2^A се разбива на следните четири подмножества:

$$B_e = \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\}$$
$$B_o = \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}$$
$$C_e = \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\}$$
$$C_o = \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}$$

Очевидно

$$2^A_e = B_e \cup C_e$$
$$2^A_o = B_o \cup C_o$$

Тъй като $B_e \cap C_e = \emptyset$ и $B_o \cap C_o = \emptyset$,

$$|2_e^A| = |B_e| + |C_e| \tag{2}$$
$$|2_o^A| = |B_o| + |C_o| \tag{3}$$

Нека $A' = A \setminus \{a\}$. Съгласно индуктивната хипотеза (1),

$$|2_e^{A'}| = |2_o^{A'}| \tag{4}$$

Очевидно е, че $2_e^{A'} = C_e$ и $2_o^{A'} = C_o$. Следователно,

$$|C_e| = |C_o| \tag{5}$$

Ще покажем, че $|B_e| = |B_o|$. Забележете, че

$$|B_e| = |C_o| \tag{6}$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_e се получава от точно един елемент v на C_o чрез „добавяне“ на a; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,
- всеки елемент w на C_o се получава от точно един елемент z на B_e чрез „махане“ на a; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

Аналогично,

$$|B_o| = |C_e| \tag{7}$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_o се получава от точно един елемент v на C_e чрез „добавяне“ на a; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,
- всеки елемент w на C_e се получава от точно един елемент z на B_o чрез „махане“ на a; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

От (6), (5) и (7) следва, че $|B_e| = |C_o| = |C_e| = |B_o|$, а оттук съгласно транзитивността на равенстото имаме:

$$|B_e| = |B_o| \tag{8}$$

От (5), (8), (2) и (3) следва, че $|2_e^A| = |2_o^A|$. $\square$

Задача 2: Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Решение:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} =$$
$$\left(\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ четно}}}(-1)^k\binom{n}{k}\right)+\left(\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ нечетно}}}(-1)^k\binom{n}{k}\right)=$$
$$\left(\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ четно}}}\binom{n}{k}\right)-\left(\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ нечетно}}}\binom{n}{k}\right) \tag{9}$$

Известно е, че $\binom{n}{k}$ е броят на подмножествата, имащи k елемента, на кое да е n-елементно множество A. Тогава, очевидно,

$$\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ четно}}}\binom{n}{k} \text{ е броят на подмножествата на } A \text{ с четен брой елементи}$$
$$\sum_{\substack{k\in\{0,1,\ldots,n\}\\ k \text{ нечетно}}}\binom{n}{k} \text{ е броят на подмножествата на } A \text{ с нечетен брой елементи}$$

Съгласно **Зад. 1**, тези две суми са еднакви. Следва, че $(9) = 0$. □

2 Принцип на Дирихле

Зад. 3 В 8 чекмеджета има 87 молива. Определете най-голямото цяло число n, такова че задължително има чекмедже с n молива.

Решение: Иначе казано, търси числото n, такова че твърдението *"Съществува поне едно чекмедже с n молива"* е задължително вярно, но твърдението *"Съществува поне едно чекмедже с $n+1$ молива"* може и да не е вярно. Съгласно обобщения принцип на Дирихле, съществува чекмедже с 11 молива. От друга страна, може да няма чекмедже с 12 молива—когато всички кутии имат по 10 или 11 молива. Отговорът е $n = 11$. □

Зад. 4 Дадена е редица от $n^2 + 1$ числа, нито две от които не са равни. Да се докаже, че тази редица съдържа монотонна поредица с дължина $n + 1$.

Пояснение: "Монотонна" означава или нарастваща, или намаляваща. "Поредица" означава числа от редицата, които не са непременно съседи в редицата, но са написани в същата последователност, в която са в редицата. Примерно, ако $n = 3$ и редицата е

$$4,\ 7,\ 11,\ 2,\ 8,\ 3,\ 14,\ 1,\ 6,\ 9$$

монотонна поредица с дължина 4 е $4, 7, 8, 14$:

$$4,\ 7,\ 11,\ 2,\ 8,\ 3,\ 14,\ 1,\ 6,\ 9$$

Решение: Да допуснем противното: всяка монотонна поредица е с дължина $\leq n$. Нека A означава дадената редица с дължина n^2+1:

$$A = a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$$

За всяко i, такова че $1 \leq i \leq n^2+1$, дефинираме двете подредици†:

$$A^i = a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n^2+1}$$
$$A_i = a_1, a_2, \ldots, a_i$$

За всяко такова i, нека s_i е дължината на най-дълга растяща поредица в A_i с последен елемент a_i и нека t_i е дължината на най-дълга намаляваща поредица в A_i с пръв елемент a_i. Очевидно, $\forall i (s(i) \geq 1 \wedge t(i) \geq 1)$, тъй като такива поредици съдържат поне a_i.

От началното допускане следва, че $\forall i (s(i) \leq n \wedge t(i) \leq n)$. Следователно,

$$1 \leq s(i) \leq n$$
$$1 \leq t(i) \leq n$$

за всяко i. Тъй като $s(i)$ и $t(i)$ вземат цели стойности, следва, че за всяко от тях стойността му е една от най-много n възможни. Прилагайки принципа на умножението заключаваме, че наредената двойка $(s(i), t(i))$ има стойност измежду най-много n^2 възможни. Но i-тата са n^2+1 на брой. Съгласно принципа па Дирихле, съществуват две различни стойности на промелнивата i, да ги наречем j и k, такива че $(s_j, t_j) = (s_k, t_k)$, тоест

$$s(j) = s(k)$$
$$t(j) = t(k)$$

Тъй като всички елементи на A са различни, $a_j \neq a_k$. Да допуснем, че без ограничение на общността, че $j < k$. Значи, a_j и a_k са разположени в A така:

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_j \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_k \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

I Първо да допуснем, че $a_j < a_k$. Тъй като s_j е дължината на най-дълга растяща поредица, завършваща с a_j:

$$A = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_j}_{\text{нарастваща поредица с дължина } s_j} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_k \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и $a_j < a_k$, то в A има нарастваща поредица с дължина $s_j + 1$, завършваща с a_k – а именно, състояща се от вече споменатата поредица, завършваща с a_j, плюс a_k накрая:

$$A = \underbrace{\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_j}_{\text{нарастваща поредица с дължина } s_j} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_k}_{\text{нарастваща поредица с дължина } s_j+1} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Но тогава $s_k > s_j$, което противоречи на факта, че по конструкция $s_j = s_k$.

II Сега да допуснем, че $a_j > a_k$. Тъй като t_k е дължината на най-дълга намаляваща поредица, започваща с a_k:

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_j \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, \underbrace{a_k \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{намаляваща поредица с дължина } t_k}$$

†За разлика от поредица, при подредица се иска елементите да са съседи в A

и $a_j > a_k$, то в A има намаляваща поредица с дължина $t_k + 1$, започваща с a_j – а именно, състояща се от вече споменатата поредица, започваща с a_k, плюс a_j в началото:

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots \underbrace{a_j \ldots\ldots\ldots\ldots \underbrace{a_k \ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{намаляваща поредица с дължина } t_k}}_{\text{намаляваща поредица с дължина } t_k+1}$$

Но тогава $t_j > t_k$, което противоречи на факта, че по конструкция $t_j = t_k$.

Следователно, първоначалното ни допускане, че най-дългата монотонна поредица не е по-дълга от n, е погрешно. □

3 Принцип на включването и изключването

Зад. 5 В група от студенти всеки владее поне един език от анлийски, френски и немски. Нека A_E е подмножеството на студентите, владеещи английски, A_F е подмножеството на студентите, владеещи френски , а A_G е подмножеството на студентите, владеещи немски. Нека A_{EF} е подмножеството на студентите, владеещи английски и френски, A_{EG} е подмножеството на студентите, владеещи английски и немски, а A_{FG} е подмножеството на студентите, владеещи френски и немски. Нека A_{EFG} е подмножеството на студентите, владеещи английски, френски и немски. Дадено е, че

$$\begin{aligned}
|A_E| &= 19 \\
|A_F| &= 25 \\
|A_G| &= 21 \\
|A_{EF}| &= 13 \\
|A_{EG}| &= 7 \\
|A_{FG}| &= 9 \\
|A_{EFG}| &= 3
\end{aligned}$$

От колко студента се състои групата?

Решение: Нека A е множеството от всички студенти в тази група. Тъй като $A = A_E \cup A_F \cup A_G$, може да смятаме, че A е универсумът и $\overline{A_E}^A \cap \overline{A_F}^A \cap \overline{A_G}^A = \emptyset$. От принципа на включване и изключване знаем, че

$$\left|\overline{A_E}^A \cap \overline{A_F}^A \cap \overline{A_G}^A\right| = |A| - (|A_E| + |A_F| + |A_G|) + (|A_{EF}| + |A_{EG}| + |A_{FG}|) - |A_{EFG}|$$

тоест

$$0 = |A| - (19 + 25 + 21) + (13 + 7 + 9) - 3$$

откъдето

$$|A| = 39$$

□

Зад. 6 При условията на **Зад. 5**,

- колко студента знаят точно два езика?
- колко студента знаят английски, но не знаят нито френски, нито немски?

Решение: Отговорът на първия въпрос е

$$|A_{EF}| + |A_{EG}| + |A_{FG}| - 3|A_{EFG}| = 13 + 7 + 9 - 3.3 = 20$$

Отговорът на втория въпрос е

$$|A_E| - (|A_{EF}| + |A_{EG}|) + |A_{EFG}| = 19 - (13 + 7) + 3 = 2$$

□

Зад. 7: Дадена е група от 100 студента. Известно е, че 37 студента учат английски, 35 студента учат френски, 33 студента учат немски, 38 студента учат испански, 16 студента учат английски и френски, 8 учат английски и немски, 18 учат английски и испански, 13 учат френски и немски, 9 учат френски и испански, 13 учат немски и испански, 5 студента учат английски, френски и немски, 6 студента учат английски, немски и испански, 5 студента учат френски, немски и испански, а 3 студента учат английски, немски, френски и испански. Колко студента учат английски, френски и испански, ако 14 студента не изучават никакви езици?

Решение: Нека търсеният брой е x. По принципа на включването и изключването имаме:

$$\begin{aligned}14 = 100 &\\ &- (37 + 35 + 33 + 38)\\ &+ (16 + 8 + 18 + 13 + 9 + 13)\\ &- (5 + 6 + 5 + x)\\ &+ 3\end{aligned}$$

тоест

$$14 = 21 - x \leftrightarrow x = 7$$

□

Зад. 8 Колко са тоталните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение: Съгласно принципите на биекцията и умножението, отговорът е n^m. □

Зад. 9 Колко са частичните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение: Нека множеството от тези функции е $\mathcal{F}$. Нека z е елемент, който не се съдържа в Y. Нека $Z = Y \cup \{z\}$. Нека $\mathcal{F}_Z$ е множеството от тоталните функции $f : X \to Z$. Тривиално е да се покаже, че съществува биекция между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_Z$ – за всяка функция от $f \in \mathcal{F}$, която е тотална, съществува точно една функция от $g \in \mathcal{F}_Z$, такава че:

$$\forall a \in X, g(a) = f(a)$$

а за всяка функция $f \in \mathcal{F}$, която е не е тотална, съществува точно една функция $g \in \mathcal{F}_Z$, такава че:

$$\forall a \in X, g(a) = \begin{cases} f(a), & \text{ако } f(a) \text{ е дефинирано} \\ z, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Съгласно предната задача, $|\mathcal{F}_Z| = (n+1)^m$. Съгласно принципа на биекцията, отговорът е $|\mathcal{F}_Z| = (n+1)^m$. □

В следващите задачи, под "функция" разбираме "тотална функция".

Зад. 10 Колко са сюрективните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение: Да въведем следните означения. Нека N е броят на всички функции. От **Зад. 8** знаем, че $N = n^m$. Ако от този брой извадим броя на не-сюрективните функции, ще получим броя на сюрекциите. Това ще направим поетапно, съгласно принципа на включване и изключване. За всеки елемент $a \in Y$, нека N_a е броят на функциите, които "не покриват" a, тоест тези, при които a не е образ на нито един елемент от X. Това не значи, че всички останали елементи от Y са покрити, а че със сигурност a не е покрит – за останалите елементи от Y не се казва нищо. Очевидно $N_a = (n-1)^m$, защото това е броят на функциите с домейн X и кодомейн $Y \setminus \{a\}$, за всяко $a \in Y$. Тъй като a взема n стойности, имаме сумата от всички N_a е $n.(n-1)^m$. Но разликата

$$n^m - n(n-1)^m \tag{10}$$

не е правилният отговор (освен ако m не е 1), тъй N_{a_1} и N_{a_2} за различни $a_1 \in Y$, $a_2 \in Y$ не броят функции, които са непременно различни – всяка функция, която не покрива нито a_1, нито a_2, ще бъде преброена като единица веднъж от N_{a_1} и веднъж от N_{a_2}. Иначе казано, (10) е по-малко от верния отговор – извадили сме прекалено много.

Нека $N_{a,b}$ е броят на функциите, които не покриват произволни $a, b \in Y$, $a \neq b$. Както и преди, може да има и други непокрити елементи от Y; със сигурност поне a и b не са покрити. $N_{a,b} = (n-2)^m$, тъй като това е броят на функциите от X в $Y \setminus \{a, b\}$. Сумата от всички такива $N_{a,b}$, по всички двуелементни подмножества $\{a, b\} \subseteq Y$, е $\binom{n}{2}(n-2)^m$. Но

$$n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m = (-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m \tag{11}$$

все още не е верният отговор (освен ако m не е 2), макар че е по-близо от (10). (11) е повече от верния отговор, тъй като с $+\binom{n}{2}(n-2)^m$ сме добавили повече, отколкото трябва, към (10).

Аналогично, $N_{a,b,c}$ е броят на функциите, които не покриват произволни $a, b, c \in Y$, $a \neq b \neq c \neq a$. $N_{a,b,c} = (n-3)^m$ и сумата от всички такива $N_{a,b,c}$, по всички триелементни подмножества $\{a, b, c\} \subseteq Y$, е $\binom{n}{3}(n-3)^m$. Ако m е достатъчно голямо, то

$$(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m + (-1)^3\binom{n}{3}(n-3)^m \tag{12}$$

все още не е верният отговор, макар че е още по-близо.

Съгласно принципа на включването и изключването, верният отговор е

$$(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + \\ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(n-(n-1))^m + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^m \tag{13}$$

Последното събираемо е нула, което съответства на факта, че има нула функции, които не покриват нито един елемент. Накракто, верният отговор е

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$$

□

Зад. 11: Колко стринга с дължина n има над латинската абзука $\{a, b, \ldots, z\}$, такива че всеки символ се среща поне веднъж?

Упътване: Разгледайте стринговете без ограничения като функции от множеството на позициите към множеството от символите (а **не** обратното!). Ограничението за вида на стринговете налага ограничение върху вида на функциите – какви трябва да са те?

Зад. 12: Колко пермутации на числата от $\{1, 2, \ldots, n\}$ има, в които нито един елемент не си е на мястото? Числото i си е на мястото, ако се намира на i-та позиция, примерно в пермутацията $2\ 1\ 3\ 5\ 6\ 4$, числото 3 си е на мястото и никое друго число не си е на мястото.

Решение: Броят на пермутациите без огрначинения е $n!$. Ще извадим от $n!$ броят на пермутациите, в които поне един елемент си е на мястото. Това ще правим поетапно, съгласно принципа на включване и изключване. Пермутациите, в които 1 е на мястото си и няма други ограничения, са $(n-1)!$ на брой. За всеки друг фиксиран елемент, аналогично, има $(n-1)!$ пермутации, в които той си е на мястото и няма други ограничения. Тъй като има n елемента, от които да фиксираме елемент на позиция, и за всеки елемент имаме $(n-1)!$ пермутации, сумата от последните е $n.(n-1)!$. Естествено, $n(n-1)! = n!$ не е правилният отговор за броя на пермутациите, в които поне един елемент си е на мястото, тъй като брои някои пермутации повече от един път. С други думи, разликата

$$n! - n(n-1)!$$

е по-малка от верния отговор (освен ако n не е 1: наистина, при $n = 1$ отговорът е 0). Съгласно принципа на включване и изключване добавяме броя на пермутациите, в които два елемента са си на местата и няма други ограничения. Тези два елемента можем да изберем по $\binom{n}{2}$ начина, за всеки избор имаме $(n-2)!$ пермутации. Но сумата

$$n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)!$$

е по-голяма от верния отговор (освен ако n не е 2), така че продължаваме аналогично, по принципа на включването и изключването:

$$n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}n(n-(n-1))! + (-1)^n(n-n)! =$$

$$(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)! + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)! + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)! + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(n-(n-1))! + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)! =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$$

Това е верният отговор. □

Зад. 13: Колко пермутации на числата от $\{1, 2, \ldots, n\}$ има, в които точно m елемента са си е на мястото за някое m, такова че $0 \leq m \leq n$, ако

- тези m елемента са фиксирани,
- тези m елемента не са фиксирани.

Зад. 14: Измежду 100 студента:

- 72 посещават практикум по C,
- 60 посещават практикум по Java.

Докажете, че поне 32 от тези студенти посещават и двата практикума.

Решение: Нека A и B са множествата от студентите, посещаващи съответно практикумите по C и Java. Нека $U = A \cup B$. Прилагайки принципа на включване и изключване спрямо този универсум, извеждаме

$$\underbrace{0}_{\text{няма елементи в допълнението}} = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$$

Оттук

$$|A \cap B| = \underbrace{|A|}_{72} + \underbrace{|B|}_{60} - |U| = 132 - |U|$$

Тъй като $|U| \leq 100$, то $|A \cap B| \geq 32$.

Зад. 15: По колко начина може да се оцветят квадратчетата на правоъгълна мрежа $m \times n$ (m реда и n колони) в k цвята

а) без ограничения;

б) с единственото ограничение, че във всеки ред няма съседни квадратчета с еднакъв цвят;

в) с единственото ограничение, че във всеки ред е използван всеки от цветовете.

Решение:

а) k^{mn}, понеже всяко оцветяване е функция от множеството на квадратчетата в множеството от цветовете. Има общо mn квадратчетаи k цвята. Прилагаме формулата за броя на функциите без ограничения (**Зад. 8**).

б) Оцветяването на произволен ред е независимо от оцветяванията на другите редове. Следователно, ако N е броят на начините да бъде оцветен произволен ред, отговорът N^m по принципа на умножението.

Да разгледаме оцветяването на ред i, където i е произволно число, такова че $1 \leq i \leq m$. Да разгледаме кое да е квадратче в ред i, примерно квадратче $(i, 1)$. За него имаме k възможности за оцветяване заради наличието на k възможни цвята. За съседното му квадратче $(i, 2)$ имаме $k - 1$ възможности поради ограничението да не се използват еднакви цветове на съседни квадратчета. Аналогично, за квадратчета $(i, 3)$, $(i, 4)$, $\ldots$, (i, n) имаме $k-1$ възможности. Като цяло, за ред i възможните различни оцветявания са $k(k-1)^{n-1}$. Следователно, $N = k(k-1)^{n-1}$ и отговорът е $k^m(k-1)^{m(n-1)}$.

в) Оцветяването на произволен ред е независимо от оцветяванията на другите редове. Следователно, ако $N(k, n)$ е броят на начините да бъде оцветен произволен ред, отговорът $(N(k, n))^m$ по принципа на умножението. $N(k, n)$ може да се получи веднага от формулата за броя на сюрекциите, но тук ще го изведем от основните принципи.

Да разгледаме оцветяването на ред i, където i е произволно число, такова че $1 \leq i \leq m$. Нека U е множеството на всички възможни оцветявания на ред i с k цвята без ограничения. $|U| = k^n$. Нека S_j е множеството от възможните оцветяванията на ред i, в които цвят j не се използва, за всички j, такива че $1 \leq j \leq k^{\dagger}$. Нека S_{j_1, j_2} е множеството от възможните оцветяванията на ред i, в които цветове j_1 и j_2 не се използват, за всички j_1 и j_2, такива че $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$. Да направим следната дефиниция, която се явява обобщение на предните две за произволен брой цветове.

Определение 1. *За всички цели положителни* j_1, j_2, $\ldots$, j_t, *такива че* $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_t \leq k$, *множеството от възможните оцветявания на ред* i, *в които цветове* j_1, j_2, $\ldots$, j_t *не се използват*‡, *е* $S_{j_1, j_2, \ldots, j_t}$. □

†Може да има и други цветове, които не се използват. Цвят j не се използва *със сигурност.*

‡Може да има и други цветове, които не се използват. Цветове j_1, j_2, $\ldots$, j_t не се използва *със сигурност.*

По принципа на включването и изключването,

$$
\begin{aligned}
N(k,n) = |U| & \\
& - \underbrace{\sum_{1 \le j_1 \le k} |S_{j_1}|}_{\text{поне един цвят не се използва}} \\
& + \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2}|}_{\text{поне два цвята не се използват}} \\
& - \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap S_{j_3}|}_{\text{поне три цвята не се използват}} \\
& \dots \\
& + (-1)^t \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_t \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_t}|}_{\text{поне } t \text{ цвята не се използват}} \\
& \dots \\
& + (-1)^{k-1} \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{k-1} \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_{k-1}}|}_{\text{поне } k-1 \text{ цвята не се използват, тоест използва се само } 1 \text{ цвят}} \\
& + (-1)^k \underbrace{|S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_k}|}_{k \text{ цвята не се използват, тоест няма оцветяване изобщо; това трябва да е } 0.}
\end{aligned}
$$

Твърдим, че за всяко t, такова че $1 \le t \le k$,

$$
|S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_t}| = \binom{k}{t}(k-t)^n \tag{14}
$$

Това е така, защото за да определим начините да се оцвети ред i, така че t цвята да не се ползват, е достатъчно да намерим броя на начините да се подберат t цвята от k—този брой е $\binom{k}{t}$—и броят начини да се оцвети реда с останалите $k-t$ цвята—този брой е $(k-t)^n$. Израз (14) следва веднага по принципа на умножението.

Тогава

$$
\begin{aligned}
N(k,n) &= k^n - \sum_{t=1}^{k} (-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^n = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^n \\
&= \sum_{t=0}^{k-1} (-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^n, \text{ тъй като } (-1)^k \binom{k}{k} (k-k)^n = 0
\end{aligned}
$$

Задача 16: По колко начина могат да седнат около кръгла маса с номерирани столове хората от n на брой женени двойки (очевидно става дума за $2n$ души), така че съпрузите от нито една двойка да не седят на съседни столове?

Решение: Нека двойките съпрузи са c_1, c_2, …, c_n. Нека S_i означава множеството от всички възможни сядания, в които съпрузите от c_i седят непозволено, тоест един до друг, за някое

i, такова че $1 \leq i \leq n$. Нека U е универсумът в тази задача, а именно, множеството от всички възможни сядания на тези $2n$ души около масата (без оглед на принадлежност към съпружески двойки). Търсеният отговор е $|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}|$. По принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned} |\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| = |U| & \\ & - \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| \\ & - \ldots \\ & + (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n| \end{aligned}$$

Лесно се вижда, че $|U| = (2n)!$, тъй като толкова са начините, $2n$ човека да седнат на $2n$ различими (номерирани) места без никакви ограничения.

Ще покажем, че всяка от сумите

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_t}|$$

където t е някое цяло число, такова че $1 \leq t \leq n$, е равна на

$$\binom{n}{t} .2n.(2n - t - 1)!.2^t$$

Тази сума е равна на броя начини t двойки да са седнали непозволено, по всички възможни начини да бъдат подбрани t двойки от $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Имаме следните четири независими съображения.

- По $\binom{n}{t}$ начина можем да подберем t двойки от общо n.
- По $2n$ начина можем да изберем два стола за първата двойка от тези t двойки.
- За останалите $t-1$ двойки, по $(2n-t-1)!$ начина можем да разположим хората от тези $t - 1$ двойки, така че хората от всяка от тези двойки да са съседи, и останалите хора (тези, които не са в нито една от въпросните t двойки) по оставащите (след сядането на първата двойка) столове. Причината това да е така е, че гледаме на тези $t - 1$ двойки като на „блокове“, тоест една такава двойка е един обект, а всеки човек, който не е в някоя двойка, е самостоятелен обект. Общо обектите са на брой

$$\begin{aligned} & \underbrace{2n - 2}_{\text{толкова са хората за настаняване след сядането на първата двойка}} \\ - & \underbrace{2(t - 1)}_{\text{от техния брой вадим броя на хората в } t-1 \text{ двойки}} \\ + & \underbrace{t - 1}_{\text{толкова са обектите от вид „двойка“}} = 2n - t - 1 \end{aligned}$$

Следователно, задачата по колко начина могат да седнат тези $t-1$ двойки непозволено на оставащите места (след сядането на първата двойка) е същата като задачата, по колко начина можем да разположим $2n - t - 1$ обекта в редица.

- За всяка от досега направените подборки на места за сядане на t двойки по всички възможни непозволени начини, за всяка двойка можем да разположим хората от нея по 2 начина на двата избрани стола. Общо това са 2^t възможни начина.

След като установихме, че

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_t \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_t}| = \binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t$$

отговорът следва да е

$$\begin{aligned}
|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| &= (2n)! + \sum_{t=1}^{n} (-1)^t.\binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t \\
&= \sum_{t=0}^{n} (-1)^t.\binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t \\
&= 2n \left(\sum_{t=0}^{n} (-1)^t.\binom{n}{t}.(2n-t-1)!.2^t \right)
\end{aligned}$$

□

Задача 17: (*) По колко начина могат да седнат около кръгла маса с номерирани столове хората от n на брой женени двойки (очевидно става дума за $2n$ души), така че съпрузите от нито една двойка да не седят на съседни столове и освен това около масата да се редуват мъж-жена-мъж-жена...?

Задача 18: Колко стринга има над азбуката $\{0, 1, 2\}$, в които има точно две букви от всеки вид и няма съседни еднакви символи?

Решение: Без последното ограничение, броят на стринговете съгласно правилото за броя на пермутации с повторения е

$$\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$$

Нека универсумът U да е това множество – стринговете с точно две a-та, две b-та и две c-та. Нека дефинираме следните подмножества на U.

- N_1 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2,
- N_2 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3,
- N_3 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 3 и 4,
- N_4 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 4 и 5,
- N_5 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{1,3}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 3 и 4,

- $N_{1,4}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 4 и 5,
- $N_{1,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{2,4}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3 и един и същи символ на позиции 4 и 5,
- $N_{2,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{3,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 3 и 4 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{1,3,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 3 и 4 и един и същи символ на позиции 5 и 6.

Съгласно принципа на включване и изключване, търсеният отговор е

$$N = |U| - (N_1 + N_2 + \ldots + N_5) + (N_{1,3} + N_{1,4} + \ldots + N_{3,5}) - N_{1,3,5}$$

Забелязваме, че $N_1 = 3 \times \binom{4}{2}$, тъй като има три възможности за символа на първа и втора позиция, а на останалите четири позиции слагаме два символа от друг вид и два от трети вид. Тогава $N_1 = 18$. Забелязваме, че $N_1 = N_2 = \ldots = N_5$.

Освен това, $N_{1,3} = 3 \times 2 \times 1 = 6$, защото имаме три възможности за символа на първа и втора позиция, оттук две възможности за символа на трета и четвърта позиция, и само една възможност спрямо досега направените избори за символа на останалите (пета и шеста) позиции. Също така, $N_{1,3} = N_{1,4} = \ldots = N_{3,5}$.

Накрая, $N_{1,3,5} = 6$ с аналогични съображения. Имаме

$$N = 90 - (5 \times 18) + (6 \times 6) - 6 = 30$$

□

4 Доказателства с комбинаторни разсъждения

Задача 19: Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Решение: Нека A е множество с $2n$ елемента. Нека всеки елемент от A има атрибут-цвят, като n елемента са бели, а останалите n, черни. По колко начина можем да подберем различни подмножества на A с по n елемента?

От една страна, това може да стане по

$$\binom{2n}{n} \tag{15}$$

начина, тъй като това са комбинаторни конфигурации без повторение и без наредба – тук не обръщаме внимание на цветовете на подбраните елементи.

От друга страна, можем да разбием подбиранията по броя на елементите от единия цвят, да речем белия. Белите елементи, които попадат в дадено подбиране, може да са 0 или 1 или …или n. Следователно, да подберем n елемента от общо $2n$ в тази задача е същото като да подберем k елемента измежду всичките n бели и да подберем $n-k$ елемента измежду всичките n черни. За дадено k, такова че $0 \leq k \leq n$, броят начини да подберем n елемента от общо $2n$, така че k измежду подбраните да са бели, е, по принципа на произведението:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{броят начини } k \text{ елемента от общо } n \text{ да са бели}} \times \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{броят начини останалите елементи да са черни}}$$

Тъй като k се мени от 0 до n и подбиранията се разбиват по k (при различен брой бели елементи в две подбирания, те задължително са различни), общият брой подбирания е:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

Но знаем, че $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, следователно общият брой на подбирания е:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \tag{16}$$

Изразите (15) и (16) броят едно и също количество, следователно са равни. □

Задача 20: Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n! = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-m}{k} (n-m-k)!$$

Решение: Лявата страна брои всички пермутации на n елемента, да кажем $\{1, 2, \ldots, n\}$. Очевидно това множество може да бъде разбито на $n+1$ непразни подмножества по това, точно колко елемента са си на мястото: 0 или 1 или 2 или …или n. Дясната страна брои същото множество пермутации, но по-детайлно, съгласно споменатото разбиване: има $\binom{n}{m}$ начина да изберем точно кои елементи да са си на местата, за оставащите $n-m$ позиции ползваме вече изведената формула за броя на пермутациите, при които нито един елемент не си е на мястото. □

Задача 21: Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$$

Решение: Вече доказахме, че броят на сюрекциите от m в n елементно множество е $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$. При $m = n$ получаваме израза от дясната страна. Но ако $n = m$, то тези сюрекции всъщност са биекциите между двете множества. А броят на биекциите е $n!$, което е лявата страна. $\square$