Комбинаторика

Зад. 1: Колко булеви вектора с дължина n има, такива че:

1. започват с 1
2. започват с 0
3. завършват с 1
4. започват или завършват с 1
5. или започват, или завършват, с 1, но не е вярно, че започват и завършват с 1

Зад. 2: Колко различни фиша може да бъдат попълнени за:

1. тото "6 от 49"
2. тото "5 от 42"

Зад. 3: Колко различни булеви вектора с n нули и m единици има, такива че след всяка нула следва единица?

Зад. 4: Колко различни булеви вектора с n нули и m единици има, такива че няма съседни единици?

Зад. 5: Колко различни булеви вектора с дължина n не съдържат нито 11, нито 00 като подвектори?

Зад. 6: Колко различни булеви вектора с дължина n не съдържат 11 като подвектор?

Зад. 7: Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$\forall n \geq 0 \left(F_{n+2} = \sum_{k=0}^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \binom{n-k+1}{k} \right)$$

Упътване За всяко естествено число n, F_n е n-тото число на Фибоначи. Използвайте предната задача – решете я по два различни начина.

Зад. 8: n на брой различни обекта са подредени в кръг. По колко начина можем да подберем k от тях, така че да не подберем нито два съседни обекта?
Упътване Разрежете кръга между произволни два обекта, като по този начин го линеаризирате. Задачата върху линейната наредба се свежда до една от предните задачи. Получавайки отговор за линейния вариант (очевидно по-прост от кръговия), преценете колко от подборките биха били неблагоприятни, когато се върнем към кръговия вариант.

Зад. 9: Рицарите на Кръглата маса са 12 на брой. Всеки рицар винаги сяда на точно определено място на масата (приемете, че столовете са различими и няма ротационна симетрия). Всеки рицар враждува с точно двама други рицари, а именно двамата си съседа около масата. По колко начина може да бъдат подбрани за някаква мисия 5 рицари измежду 12-те, така че измежду петте избранника да няма нито двама враждуващи?
Упътване Използвайте резултата от предната задача.

Зад. 10: Нека $A = \{10, 11, \ldots, 99\}$. Докажете, че във всяко десет елементно подмножество на A съществуват две непразни непресичащи се подмножества с еднаква сума на елементите.

Решение: Всяко 10 елементно подмножество има $2^{10} - 1 = 1023$ непразни подмножества. От друга страна, $\forall B \subset A$, такова че $1 \leq |B| \leq 10$, е в сила:

$$10 \leq \sum_{x \in B} x \leq 90 + 91 + \ldots 99 = 935$$

Оттук виждаме, че $\sum_{x \in B} x$ има не повече от 935 различни стойности. Но тогава броят на възможните суми е по-малък от броя на подмножествата. Прилагаме принципа на Дирихле и виждаме, че поне две подмножества имат една и съща сума. $\square$

Зад. 11: По колко начина можем да хвърлим пет зара, ако заровете са различими (примерно, бял, червен, син, зелен и жълт)? Става дума за стандартни зарове-кубчета.

Зад. 12: По колко начина можем да хвърлим пет зара, ако заровете са не различими (примерно, всичките бели)? Става дума за стандартни зарове-кубчета.

Решение: Това са комбинаторни конфигурации с дължина 5 над опорното множество $A = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$, с повторение и без наредба. Броят им е $\binom{5+6-1}{5} = 252$.

Зад. 13: По колко различни начина можем да сложим шестте символа

⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅

върху шестте стени на зар? Под "различни начина" разбираме следното. Да си представим, че два зара са сложени на масата пред нас, успоредно един до друг. Всеки от тях има предна, задна, горна, долна, лява и дясна стена. Шестте символа да са сложени по един и същи начин означава

- или двата зара да имат един и същи символ върху предната стена и върху задната стена и върху горната стена и т.н.
- или единият зар да може да бъде завъртян така, че двата зара да имат един и същи символ върху предната стена и върху задната стена и върху горната стена и т.н.

Зад. 14: По колко начина n човека могат да се хванат за ръце в кръг (на хоро)?
Упътване Става дума за пермутации, различни спрямо ротация.

Зад. 15: По колко начина можем да нанижем n различни мъниста на огърлица?
Упътване Става дума за пермутации, различни спрямо ротация и рефлексия, защото огърлицата—за разлика от хорото, което може да бъде завъртяно само около центъра си—може да бъде завъртяна около ос, минаваща през две диаметрално противоположни мъниста.

Зад. 16: По колко начина можем да подредим в редица 5 бели, 7 сини и 9 жълти топки? Топките от всеки цвят са неразличими.

Зад. 17: Треньорът на националния отбор по футбол иска да подбере играчи за националния отбор само измежду отборите на Левски и ЦСКА. По колко начина може да да направи това, ако:

1. няма ограничения
2. трябва да подбере поне четири футболисти от Левски?

Упътване Един футболен отбор се състои от 11 играча.

Пояснение В следващите задачи става дума за играта на карти бридж. За целите на задачите, всичко което е необходимо да се знае за бриджа, е следното. Бридж се играе с различни 52 карти, като всяка карта има два атрибута. Единственото, което различава една карта от друга, са атрибутите. Единият от тези атрибути се нарича **цвят**, а другият, **вид**. Има 4 цвята:

$\clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit$

и 13 вида:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

Последните четири вида се наричат съответно вале, дама, рига (поп) и асо. От всеки цвят има карти от всичките 13 вида. Иначе казано, можем да мислим за картите като за декартовото произведение на множествата от цветовете и видовете. **Ръка** се нарича произволна подборка от 13 карти, като подредбата на картите в ръката няма значение. **Разпределение на цветовете** в дадена ръка наричаме редица от цели неотрицателни числа c_1, c_2, c_3, c_4, такава че:

- $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c_4$,
- $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 13$,
- за някой цвят, броят на картите от него в ръката е c_1, за друг цвят е c_2, за трети е c_3, а за четвъртия цвят е c_4.

Зад. 18: Колко ръце има в бриджа, ако:

1. няма наложени ограничения
2. има поне една дама
3. има точно една дама
4. има поне две аса
5. има точно три аса

Зад. 19: Покажете грешката в следния "отговор" на Задача 17, (4).

Съществуват точно $\binom{4}{2} = 6$ начина да подберем две аса от четирите

$$\clubsuit\mathsf{A} \qquad \diamondsuit\mathsf{A} \qquad \heartsuit\mathsf{A} \qquad \spadesuit\mathsf{A}$$

След като веднъж изберем двете аса, останалите $13 - 2 = 11$ карти в ръката се избират произволно измежду $52 - 2 = 50$ карти; това можем да направим по $\binom{50}{11}$ начина. Съгласно принципа на умножението, отговорът е

$$\binom{4}{2} \times \binom{50}{11} = 224\,122\,432\,800$$

Задача 20: Колко са възможните ръце в бриджа с разпределение на цветовете $5, 4, 4, 0$?

Решение: За фиксирано разпределение на цветовете от даден вид—примерно, пет $\heartsuit$, четири $\spadesuit$, четири $\clubsuit$, нула $\diamondsuit$—броят на възможните ръце е:

$$\binom{13}{5} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{0} = 657\,946\,575$$

Това е така, понеже по $\binom{13}{k}$ начина можем да подберем k карти от 13-те карти от даден цвят.

Отговорът е произведението от $657\,946\,575$ и броят начини, по които можем да изберем от кой цвят да има 5 карти, от кой 4 и т.н. Този брой е

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 12$$

тъй като по $\binom{4}{1}$ начина може да изберем от кой цвят да има 5 карти и по $\binom{3}{1}$ начина, от оставащите 3 цвята, от кой да има 0 карти; след като сме избрали от кой цвят да има 5 и от кой, 0 карти, за цветовете с по 4 карти изборът е само един. Друг начин да се изведе това „12“ е чрез формулата за мултиномния коефициент:

$$\frac{4!}{1!.2!.1!} = 12$$

И така, отговорът е

$$657\,946\,575 \times 12 = 7\,895\,358\,900 \qquad \square$$